

Tehniška matematika TM9a

Delo in energija. Toplota

Avtorji: Peter Kitak, Tine Zorič, Gordana Radić.

1. Uvod

Pri obravnavanju dinamike togega telesa smo obravnavali gibanje togega telesa pod vplivom zunanje sile (zunanjih sil). Ker je premagovanje sile na določeni poti enako delu, nismo povedali, da se pri gibanju togega telesa vloženo delo lahko pretvarja tudi v energijo, v procesu, ki je reverzibilen (obrnljiv) ali ne. Poleg tega nismo obravnavali primerov v katerem je v dinamičnem procesu vključeno več teles. Zato bomo na tej spletni strani vse prej povedano osvetlili še z naslednjim:

- a) Dinamika teles je zelo pogosto povezana s pretvorbo dela v energijo ali ene oblike energije v drugo.
- b) Vse doslej smo pri razlagi dinamike obravnavali eno samo telo. V nekaterih problemih dinamike pa telesa vplivajo tudi med sabo, v dinamični problem je vključenih več teles (trk dveh ali več teles je tak).

Ko smo definirali togo telo smo ga predstavili kot telo, ki se mu oblika zaradi vpliva zunanjih sil nič ne spremeni, kar nikoli ni povsem res. So pa te spremembe včasih tako male, da smemo telo mirne duše obravnavati kot togo telo. To velja v prvi vrsti za dinamiko kovinskih teles.

Snovi po svojih lastnostih delimo v tri osnovne skupine: trdnine, kapljevine in pline. **Trdnine** so snovi, ki brez vpliva zunanjih sil ohranijo svojo obliko. **Kapljevine** so snovi, ki zavzamejo obliko posode, v kateri se nahajajo, ne da bi pri tem spremenile prostornino (voda). **Plini** pa vselej zavzamejo ves razpoložljivi prostor (zrak). Zato bi dinamiko snovi morali razdeliti v:

- dinamiko trdnin,
- dinamiko kapljev in
- dinamiko plinov.

Zaenkrat se bomo tu ukvarjali le s trdninami. Tudi te delimo v dve skupini:

- **Prožne** (elastične) snovi se pod vplivom zunanje sile deformirajo (spremenijo obliko), se pa povrnejo nazaj v prvotno obliko, ko zunanja sila izgine. Pravimo, da je bila deformacija **elastična**. Vzmet se potem, ko zunanja sila izgine, elastično povrne v prvotno (neobremenjeno) obliko.
- **Neprožne** (neelastične, plastične) snovi pa potem, ko zunanja sila izgine, ostanejo v deformirani obliki. Pravimo, da je bila deformacija **plastična**. Obravnava plastičnih snovi običajni ni del dinamike. Trk dveh avtomobilov je tak.

2. Delo in energije v dinamiki togih teles

Sila teže teles G je v tehniških primerih vselej prisotna. Zanimariti je smemo le v primerih, ko bistveno ne vpliva na dinamiko telesa. Tako smo smeli težo valja, ki ima kroglične ležaje zanemariti, ker je bilo trenje v krogličnih ležajih praktično zanemarljivo, os vrtenja pa se je ujemala s težiščem valja. Nismo je smeli zanemariti pri drsenju telesa, tam je bilo trenje zaradi teže telesa bistvena sestavina problema.

Kroženje telesa v navpični ravnini

Na neraztegljivo vrstico s polmerom R naj bo navezana kroglica z maso m , ki kroži v navpični ravnini. Poleg sile teže G v vsaki točki krožnice deluje centrifugalna sila F_{cf} , ki deluje v smeri polmera vrstice navzven in jo napenja.

Če predpostavimo, da ima kroglica z maso m v točki a potencialno energijo $W_{pa} = 0$ ima v točki b na račun dela pri premagovanju sile teže potencialno energijo

$$W_{pb} = W_{pa} + G \cdot h = m \cdot g \cdot 2R \text{ J}$$

Istočasno pa v točki b delujeta na maso nasprotno usmerjeni sili, centrifugalna sila

$$F_{cf} = m \cdot \omega^2 \cdot R = \frac{m \cdot v_b^2}{R} \text{ N}$$

navzgor in sila teže

$$G = m \cdot g \text{ N}$$

navzdol. Da bo vrstica ostala napeta, mora v točki b veljati

$$F_{cf} > G \quad \text{ali} \quad \frac{v_b^2}{R} > g \cdot 2R$$

Za obodno hitrost v točki b mora torej veljati

$$v_b > \sqrt{2 \cdot R^2 \cdot g} \text{ m/s}$$

Če zanemarimo zračni upor in trenje v osi vrtenja, mora za poljubno točko krožnice $T(x, y)$ (poljuben trenutek t) veljati konstantna vrednost obeh energij

$$W_p(t) + W_k(t) = \text{konst.}$$

Razmere pri kroženju bomo najlepše ponazorili kar s praktičnim zgledom!

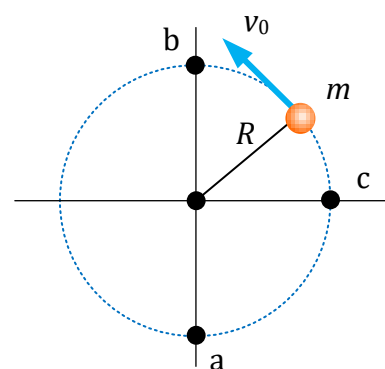
Zgled

Kroglica z maso $m = 5 \text{ kg}$ kroži pritrjena na neraztegljivo vrstico dolžine $R = 20 \text{ cm}$ okoli fiksne osi v vertikalni ravnini. Vrednost potencialne energije v točki a izberemo $W_p(a) = 0$, bi pa smeli izbrati poljubno vrednost. Kolikšno obodno hitrost mora imeti kroglica v točki b, da ostane vrstica napeta!

Rešitev

Obodna hitrost v točki b mora biti večja od

$$v_b > \sqrt{2 \cdot R^2 \cdot g} = \sqrt{2 \cdot 0,2^2 \cdot 10} = \sqrt{0,8} = 0,894 \text{ m/s} = v_{b,\min}$$



Zato bomo izbrali $v_b = 2 \text{ [m/s]}$

Ko je kroglica v točki b ima torej kinetično energijo

$$W_{kb} = \frac{m \cdot v_b^2}{2} = \frac{5 \cdot 2^2}{2} = 10 \text{ J}$$

in potencialno energijo

$$W_{pb} = W_{pa} + G \cdot h = m \cdot g \cdot 2R = 5 \cdot 10 \cdot 0,4 = 20 \text{ J},$$

kjer smo izbrali $W_{pa} = 0$.

Vsota obeh energije ostane konstantna

$$W_k + W_p = 10 + 20 = 30 \text{ [J]} = \text{konst.}$$

Potemtakem mora biti kinetična energija v točki a

$$W_{ka} = \frac{m \cdot v_a^2}{2} = 30 \text{ J}$$

Odtod določimo obodno hitrost v točki a

$$v_a = \sqrt{\frac{2 \cdot W_{ka}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 30}{5}} = \sqrt{12} = 3,464 \text{ m/s}$$

Ker se pri kroženju ob upoštevanju teže G spreminja obodna hitrost, se spreminja tudi kotna hitrost ω . Tako je v točki b kotna hitrost

$$\omega_b = \frac{v_b}{R} = \frac{2}{0,2} = 10 \text{ rad/s}$$

in v točki a

$$\omega_a = \frac{v_a}{R} = \frac{3,464}{0,2} = 17,32 \text{ rad/s}$$

V točki c je kinetična energija

$$W_{kc} = 30 - W_{pc} = 30 - 10 = 20 \text{ J}$$

Odtod sta obodna hitrost in kotna hitrost v točki c

$$v_c = \sqrt{\frac{2 \cdot W_{kc}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{5}} = \sqrt{8} = 2,83 \text{ m/s}$$

$$\omega_c = \frac{v_c}{R} = \frac{2,83}{0,2} = 14,14 \text{ rad/s}$$

Zgled 2

Polni valj iz zgleda dinamike kroženja s polmerom $R=0,1 \text{ m}$ in maso $m=200 \text{ kg}$ naj se začne v trenutku $t=0$ kotaliti po strmini navzdol. Kot strmine je $\alpha=30^\circ$. Višinska razlika, za katero se spusti valj, preden preide v ravnino je $h=20 \text{ m}$. Kolikšno kinetično energijo ima valj ob prehodu v ravnino? Delne rezultate uporabimo!

Rešitev

Pot valja je

$$s = \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{20}{0,5} = 40 \text{ m}$$

Na štartu je imel valj potencialno energijo J .

Pri kotaljenju navzdol pridobi valj kinetično energijo zaradi translacije in zaradi rotacije.

Ker sta zaradi enake obodne in translacijske hitrosti obe enaki, je kinetična energija zaradi rotacije

$$W_{kr} = \frac{J \cdot \omega^2}{2} = 20000 \text{ J}$$

Vztrajnostni moment valja je

$$J = \frac{m \cdot R^2}{2} = \frac{200 \cdot 0,1^2}{2} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Kotna hitrost valja ob prehodu v ravnino je

$$\omega = \sqrt{\frac{2 \cdot W_{kr}}{J}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20000}{1}} = 200 \text{ rad/s}$$

Povprečna kotna hitrost je

$$\bar{\omega} = \frac{\omega}{2} = 100 \text{ rad/s}$$

ter povprečna potovalna hitrost valja

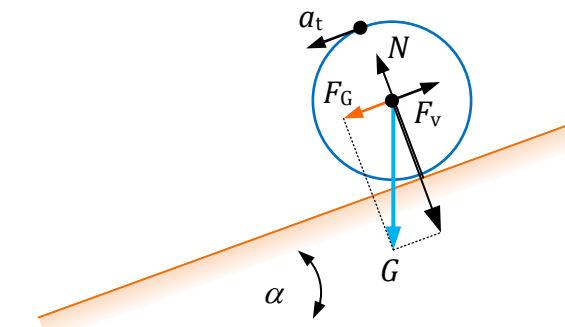
$$\bar{v} = \bar{\omega} \cdot R = 100 \cdot 0,1 = 10 \text{ m/s}$$

Valj se prikotali v ravnino v času

$$t = \frac{s}{\bar{v}} = \frac{40}{10} = 4 \text{ s}$$

Kinetična energija zaradi translacije in rotacije je

$$W_k = \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{200 \cdot 20^2}{2} = 40000 \text{ J}$$



Gibalna količina

Kadar imamo opravka s translacijo enega samega togega telesa pospešek, masa in sila povsem zadoščajo za izračun gibalnega stanja telesa. Če pa imamo opravka z dvema (ali več) telesi pa uporaba Newtonovega zakona dinamike sama ne zadostuje. Uvesti moramo novo fizikalno veličino, ki jo imenujemo **gibalna količina** $\vec{G}$.

Sila F daje masi m pospešek a in povzroča enakomerno naraščanje hitrosti v . Če sila deluje časovni interval Δt , je prirastek hitrost

$$\Delta v = a \cdot \Delta t$$

Če je bila začetna hitrost v_0 , je po časovnem intervalu Δt hitrost

$$v = v_0 + a \cdot \Delta t \Rightarrow a \cdot \Delta t = v - v_0$$

Delovanje sile v intervalu Δt imenujemo **sunek sile**

$$F \cdot \Delta t = m \cdot a \cdot \Delta t = m \cdot v - m \cdot v_0$$

Če vpeljemo novo fizikalno veličino – **gibalno količino**

$$G = m \cdot v \left[\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}} \right],$$

lahko postavimo trditev:

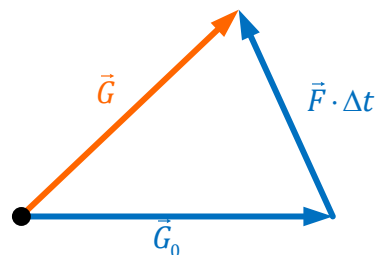
Sunek sile $F \cdot \Delta t$ ima za posledico spremembo gibalne količine G !

Odtod izhaja še druga odvisnost

$$F = \frac{\Delta G}{\Delta t}$$

Tako sila F kot gibalna količina G sta vektorski veličini.

Zato jih moramo seštevati vektorsko (oz. geometrijsko).



Zgled 1a

Šofer avta z maso $m = 1000 \text{ kg}$ je z zaviranjem v časovnem intervalu $\Delta t = 5 \text{ s}$ znižal hitrost z $v = 120 \text{ km/h}$ na $v_0 = 30 \text{ km/h}$. S kolikšno silo F je zaviral?

Obe hitrosti moramo spremeniti v osnovne enote!

$$v = \frac{120}{3,6} = 33,3 \text{ m/s}, \quad v_0 = \frac{30}{3,6} = 8,3 \text{ m/s}$$

Gibalni količini pred in po zaviranju sta

$$G = m \cdot v = 33333 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \quad G_0 = m \cdot v_0 = 8333 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Sprememba gibalne količine je

$$F \cdot \Delta t = G - G_0 = 33333 - 8333 = 25000 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Potrebna sila zaviranja je

$$F = \frac{\Delta G}{\Delta t} = \frac{25000}{5} = 5000 \text{ N}$$

Ker pa imamo opravka z enim samim telesom, lahko problem rešimo tudi s pomočjo kinematike in 1. Newtonovega zakona dinamike.

Zgled 1b

Rešitev

Iz

$$\Delta v = a_z \cdot \Delta t$$

Izračunamo zaviralni pojemek a_z

$$a_z = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{25}{5} = 5 \text{ m/s}$$

Odtod izračunamo silo zaviranja

$$F = m \cdot a_z = 1000 \cdot 5 = 5000 \text{ N}$$

Nalogo pa lahko rešimo tudi s pomočjo energij, kinetično energijo moramo pretvoriti v delo pri zaviranju.

Zgled 1c

Rešitev

Delo, ki se pri zaviranju opravi, je enako spremembi kinetičnih energij pri zaviranju

$$A = W_k - W_{k0} = \frac{m}{2} \cdot (v^2 - v_0^2) = \frac{1000}{2} (33,33^2 - 8,33^2) = 520825 \text{ J}$$

Povprečna hitrost med zaviranjem je

$$\bar{v} = \frac{v + v_0}{2} = \frac{41,66}{2} = 20,83 \text{ m/s}$$

Pot med zaviranjem je

$$s = \bar{v} \cdot t = 20,83 \cdot 5 = 104,15 \text{ m}$$

Sila zaviranja je

$$F = \frac{A}{s} = \frac{520825}{104,15} = 5000 \text{ N}$$

Sedaj pa si oglejmo zgled, ki je rešljiv le z uporabo gibalnih količin.

Zgled 2

Telo z maso $m_k = 5 \text{ kg}$ (lesena kocka) je obešeno na neraztegljivi vrvici dolžine $l = 1 \text{ m}$ predstavlja fizično nihalo. Masa vrvice je zanemarljiva. V trenutku $t = 0$ prileti v višini težišča svinčenka s prostornino $V_s = 2 \text{ cm}^3$. Za kolikšen največji kot α se je odklonila lesena kocka s svinčenko v njej? Specifična masa svinca je $\rho_{pb} = 11,3 \text{ kg/dm}^3$.

Rešitev

Masa svinčenke je

$$m_s = \rho_{pb} \cdot V_s = 11300 \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 0,0226 \text{ kg}$$

Gibalna količina svinčenke je

$$G_s = m_s \cdot v_s = 0,0226 \cdot 450 = 10,17 \text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

Ko se svinčenka zarije v kocko, je skupna masa

$$M = m_s + m_k = 5,0226 \text{ kg}$$

Vrednost gibalne količine ostane nespremenjena, zato iz

$$M \cdot v = G_s$$

izračunamo hitrost mase M

$$v = \frac{G_s}{M} = \frac{10,17}{5,0226} = 2,025 \text{ m/s}$$

Masa M ima na račun hitrosti kinetično energijo

$$W_{\text{km}} = \frac{M \cdot v^2}{2} = \frac{5,0226 \cdot 2,025^2}{2} = 10,3 \text{ J}$$

Končni nihaj doseže masa M , ko se vsa kinetična energija pretvori v potencialno

$$W_{\text{pm}} = M \cdot g \cdot h = W_{\text{km}} = 10,3$$

Masa M se dvigne za

$$h = \frac{W_{\text{pm}}}{M \cdot g} = \frac{10,3}{50,226} = 0,205 \text{ m}$$

Kot, za katerega se je odklonila masa M , določimo iz

$$\cos \alpha = \frac{l-h}{l} = 0,795 \Rightarrow \alpha = 37,3^\circ$$

V praktičnem poskusu gre izračun ravno obratno pot. Kot odklona α s poskusom izmerimo in iz njega določimo hitrost svinčenke. Rezultat se ne bi kaj dosti spremenil, če bi v skupni masi M maso svinčenke m_s zanemarili.

Če svinčenka ne bi zadela v višini težišča kocke, bi morali upoštevati še vztrajnostni moment kocke.

Zgled 3

Vagonu z maso $m_1 = 8000 \text{ kg}$, ki se premika s hitrostjo $v_1 = 0,8 \text{ m/s}$ priklopimo vagon z maso $m_2 = 12000 \text{ kg}$, ki se premika v isti smeri s hitrostjo $v_2 = 1,5 \text{ m/s}$. s Kolikšno hitrostjo se bo premikala kompozicija obeh.

Rešitev

Gibalni količini pred priklopom sta bili

$$G_1 = m_1 \cdot v_1 = 8000 \cdot 0,8 = 6400 \text{ kg}\cdot\text{m/s in}$$

$$G_2 = m_2 \cdot v_2 = 12000 \cdot 1,5 = 18000 \text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

Ker ostane skupna gibalna količina

$$G = G_1 + G_2 = 24400 \text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

nespremenjena, bo hitrost kompozicije po priklopu

$$v = \frac{G}{m_1 + m_2} = \frac{24400}{20000} = 1,22 \text{ m/s}$$

3. Trki

Ko smo opredelili gibalno količino smo se srečali s trki teles. Za razlago pojava si oglejmo le trk dveh teles.

Trk je pojav, pri katerem se dve telesi, ki se relativno gibljeta eno proti drugemu, dotakneta. Pri tem se lahko spremenita tako velikosti in/ali smeri hitrosti teles. Ne glede na to ali je trk prožen ali neprožen, ostane skupna gibalna količina vselej **nespremenjena**. Pri neelastičnem trku je to že potreben in zadosten pogoj.

Pri trku dveh neprožnih teles se ti pri trku zlepi in nadaljujeta s skupno hitrostjo.

$$m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \cdot \vec{v}$$

Pri tem se gibalni količini vektorsko seštevata.

Pri trku dveh prožnih teles se ti odbijeta, poleg ohranitve gibalne količine ostane tudi skupna kinetična energija **nespremenjena**. Izpolnjen je poleg ohranitve gibalne količine

$$m_1 \cdot \vec{v}_{1pr} + m_2 \cdot \vec{v}_{2pr} = m_1 \cdot \vec{v}_{1po} + m_2 \cdot \vec{v}_{2po}$$

še dodatni pogoj ohranitve skupne kinetične energije

$$\frac{m_1 \cdot v_{1pr}^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_{2pr}^2}{2} = \frac{m_1 \cdot v_{1po}^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_{2po}^2}{2}$$

kjer indeksa pr in po pomenita hitrosti pred in po trku.

Neprožni trk dveh teles

Trk dveh vozil je tipičen primer neprožnega trka. Oglejmo si to na dveh zgledih!

Zgled 1

Avto ima maso $m_1 = 1200 \text{ kg}$ in vozi s hitrostjo $v_1 = 60 \text{ km/h}$. Tovornjak ima maso $m_2 = 6000 \text{ kg}$ in vozi s hitrostjo $v_2 = 90 \text{ km/h}$. Določiti želimo hitrost vozil:

a) pri čelnem trčenju,

b) ko se tovornjak od zadaj zaleti v avto.

Obe vozili imata ob naletu gibalni količini

$$G_a = m_1 \cdot v_1 = 1200 \cdot \frac{60}{3,6} = 20000 \text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

$$G_t = m_2 \cdot v_2 = 6000 \cdot \frac{90}{3,6} = 150000 \text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

Rešitev a

Pri čelnem trčenju imata gibalni količini nasprotno smer. Zato je

$$G = G_t - G_a = 130000 \text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

Hitrost obeh razbitin po trčenju je

$$v = \frac{G}{m_1 + m_2} = \frac{130000}{7200} = 18,06 \text{ m/s}$$

Rešitev b

Pri naletu imata gibalni količini isto smer. Zato je

$$G = G_t + G_a = 170000 \text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

Hitrost obeh razbitin po trčenju je

$$v = \frac{G}{m_1 + m_2} = \frac{170000}{7200} = 23,6 \text{ m/s}$$

To, da je hitrost razbitin po čelnem trku manjša kot pri naletu, ne pomeni, da je ta manj nevaren. Kinetični energiji, ki se v obeh primerih spremenijo v delo sta

$$W_{\text{ka}} = \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2} = \frac{1200 \cdot 16,67^2}{2} + \frac{6000 \cdot 25^2}{2} = 2,042 \text{ MJ}$$

$$W_{\text{ka}} = \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2} - \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} = \frac{6000 \cdot 25}{2} - \frac{1200 \cdot 16,67^2}{2} = 1,71 \text{ MJ}$$

Pri čelnem trku se sprosti več kinetične energije. Razlika je tem večja, čim večja je razlika obeh hitrosti.

Zgled 2

Svinčenka z maso $m_s = 0,02 \text{ kg}$ se s hitrostjo $v_s = 300 \text{ m/s}$ zarije v leseno klado z maso $m_k = 0,5 \text{ kg}$. Specifična toplota svinca je $c_{\text{pb}} = 130 \text{ J/kgK}$

- Kolikšno hitrost v imata svinčenka in klada po trku?
- Za koliko se je zmanjšala kinetična energija pri trku?
- Za koliko se je segrela svinčenka, če se je za segrevanje porabilo 75% začetne energije?

Rešitev

Iz ohranitve gibalne količine

$$m_s \cdot v_s = (m_s + m_k) \cdot v$$

Izhaja

$$v = \frac{m_s \cdot v_s}{m_s + m_k} = \frac{0,02 \cdot 300}{0,02 + 0,5} = 11,54 \text{ m/s}$$

Kinetična energija svinčenke pred trkom je

$$W_{\text{ks}} = \frac{m_s \cdot v_s^2}{2} = \frac{0,02 \cdot 300^2}{2} = 900 \text{ J}$$

Kinetična energija obeh mas po trku je

$$W_{\text{kpo}} = \frac{(m_s + m_k) \cdot v^2}{2} = \frac{0,52 \cdot 11,54^2}{2} = 34,6 \text{ J}$$

Kinetična energija se je pri trku zmanjšala za

$$\Delta W_k = W_{\text{ks}} - W_{\text{kpo}} = 900 - 34,6 = 865,4 \text{ J}$$

Za koliko se je svinčenka segrela določimo iz

$$0,75 \cdot W_{\text{ks}} = m_s \cdot c_{\text{Pb}} \cdot \Delta T$$

$$\Delta T = \frac{0,75 \cdot W_{\text{ks}}}{m_s \cdot c_{\text{Pb}}} = \frac{0,75 \cdot 900}{0,02 \cdot 130} = 260 \text{ K}$$

Trk dveh prožnih teles

Ker smo pravila prožnega trka že navedli, si oglejmo le zgled.

Zgled

Dve prožni kroglici z enako maso $m_1 = m_2 = 0,2 \text{ kg}$, vendar različni hitrosti $v_1 = 5 \text{ m/s}$ v smeri negativne x osi in $v_2 = 10 \text{ m/s}$ v smeri pozitivne x osi. Kroglici trčita čelno.

Rešitev

Gibalna količina pred trkom je

$$\vec{G}_{\text{pr}} = -m_1 \cdot v_{1\text{pr}} \cdot \vec{i} + m_2 \cdot v_{2\text{pr}} \cdot \vec{i} = (-1 + 2) \cdot \vec{i} = 1 \cdot \vec{i} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Kinetična energija kroglic pred trkom je

$$W_{\text{kpr}} = \frac{m_1 \cdot v_{1\text{pr}}^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_{2\text{pr}}^2}{2} = \frac{0,2 \cdot 25}{2} + \frac{0,2 \cdot 100}{2} = 2,5 + 10 = 12,5 \text{ J}$$

Gibalna količina po trku je

$$\vec{G}_{\text{po}} = 0,1 \cdot v_{1\text{po}} \cdot \vec{i} + 0,1 \cdot v_{2\text{po}} \cdot \vec{i} = 1 \cdot \vec{i} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

in kinetična energija po trku je

$$W_{\text{kpo}} = \frac{m_1 \cdot v_{1\text{po}}^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_{2\text{po}}^2}{2} = 0,1 \cdot v_{1\text{po}}^2 + 0,1 \cdot v_{2\text{po}}^2 = 12,5 \text{ J}$$

Odtod dobimo sistem dveh enačb

$$v_{1\text{po}} + v_{2\text{po}} = 10$$

$$v_{1\text{po}}^2 + v_{2\text{po}}^2 = 125$$

Odtod eno izrazimo z drugo

$v_{2po} = 10 - v_{1po}$ in vstavimo v drugo enačbo

$$v_{1po}^2 + 100 - 20 \cdot v_{1po} + v_{1po}^2 = 125 \text{ m/s}$$

$$v_{1po}^2 - 10 \cdot v_{1po} - 25 = 0 \text{ m/s}$$

Iz gibalne količine po trku izhaja, da sta obe hitrosti po trku enaki in v smeri pozitivne x osi. Prva kroglica se je odbila v nasprotno smer, druga pa je izgubila polovico hitrosti.

Če bi imeli obe kroglici enaki masi in nasprotno usmerjeni hitrosti, bi se z enako velikimi hitrostmi odbili vsaka v nasprotno smer.

4. Vzmet

Vzmet je elastični mehanski element, ki je sposoben pri nategu ali stiskanju pretvoriti delo v potencialno energijo napete vzmeti.

Vzmet ima v nenapetem stanju dolžino l , ki se pri nategu zveča pri stisku pa skrajša za raztezek ali skrček x .

Raztezek ali skrček x je odvisen od velikosti sile F , ki ga povzroča in koeficienta vzmeti k . Med seboj so povezani z enačbo

$$F = k \cdot x$$

Če raztegnemo ali skrčimo vzmet za razdaljo dx smo pravili delo

$$dA = F \cdot dx = k \cdot x \cdot dx \quad [J]$$

ki se je kot potencialna energija nakopičila v elastični energiji vzmeti. Pri raztezk x je v vzmeti nakopičena potencialna energija.

Vzmeti razvrščamo glede na obremenitev na: tlačne, natezne, upogibne in vzvojne vzmeti; glede na obliko pa na: vijačne, membranske, listaste in palične vzmeti.

Zgled

Natezna vzmet ima koeficient vzmeti $k = 20 \text{ kN/m}$. Kolikšna sila F je potrebna in kolikšna elastična energija je nakopičena v vzmeti, če jo raztegnemo za $x = 1 \text{ cm}$.

Rešitev

Potrebna natezna sila je

$$F = k \cdot x = 20000 \cdot 0,01 = 200 \text{ N}$$

V vzmeti je nakopičena potencialna energija

$$W_{vz} = \frac{k \cdot x^2}{2} = \frac{20000 \cdot 0,0001}{2} = 1 \text{ J}$$

Veliko trkov je takih, ki niso niti povsem prožni niti po vsem plastični. Tako so vagoni opremljeni z vzmetnimi amortizerji, za naš zgled dveh vagonov ne bi bil povsem neprožen.

Dinamika trdnin je sicer najbolj pomemben del dinamike materialov. Nekoliko manj pomembni sta dinamika kapljev in dinamika plinov. Na spletnih straneh lahko najdete obilo materiala o obeh dinamikah.

5. Vrtilna količina

Čeprav je pretežna večina dinamičnih pojavov, v katerih nastopa več teles, vezana na translacijo, obstajajo tudi taki, ki povezujejo rotacijo dveh ali več teles. V takih primerih poznavanje navora sile

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = J \cdot \vec{\alpha} \text{ [Nm]}$$

kjer sta J vztrajnostni moment telesa in α kotni pospešek. Tangentni pospešek več ne zadostuje za rešitev dinamičnega pojava. Uvesti moramo novo fizikalno veličino

$$\vec{\Gamma} = J \cdot \vec{\omega},$$

ki jo po analogiji s translacijo imenujemo vrtilno količino.

Ker nam je analogija translacije in vrtenja znana

$$\vec{v} \Leftrightarrow \vec{\omega}$$

$$\vec{F} \Leftrightarrow \vec{M}$$

$$m \Leftrightarrow J$$

da navedemo le nekateri od njih, je očiten naslednji zaključek: če produkt navora in časovnega intervala imenujemo sunek navora, je po analogiji s translacijo, **sunek navora enak spremembi vrtilne količine**

$$\vec{M} \cdot \Delta t = \Delta \vec{\Gamma} = J \cdot \vec{\omega} - J \cdot \vec{\omega}_0,$$

kjer je

$$\vec{\Gamma}_0 = J \cdot \vec{\omega}_0$$

vrtilna količina pred nastopom sunka navora.

Če v sistemu teles navora ni ali je rezultanta vseh navorov nič, ostaja vrtilna količina nespremenjena. Če pa bi vztrajnostni moment zmanjšali, bi se morala povečati kotna hitrost. Ta efekt dobro poznajo drsalci na ledu.

Zgled

Fant sedi na vrtljivem stolu in v iztegnjenih rokah drži dve kovinski krogli s skupno maso m . Razdalja težišča krogel od osi vrtenja je r_1 . Stol in fanta z iztegnjenimi rokami zavrtimo, da dobi kotno hitrost $\vec{\omega}_1$. Nato fant skrči roki, da sta kovinski krogli le še na razdalji r_2 . Na katero vrednost $\vec{\omega}_2$ se je spremenila kotna hitrost?

Rešitev

Pred skrčenje rok je bil skupni vztrajnostni moment

$$J_1 = J_{\text{st}} + J_f + m \cdot r_1^2$$

Po skrčenju rok je skupni vztrajnostni moment

$$J_2 = J_{\text{st}} + J_f + m \cdot r_2^2$$

Ker se skupna vrtilna količina ni spremenila

$$(J_{\text{st}} + J_f + m \cdot r_1^2) \cdot \omega_1 = (J_{\text{st}} + J_f + m \cdot r_2^2) \cdot \omega_2$$

Od tod dobimo kotno hitrost po skrčenju rok

$$\omega_2 = \frac{J_{\text{st}} + J_f + m \cdot r_1^2}{J_{\text{st}} + J_f + m \cdot r_2^2} \cdot \omega_1 > \omega_1$$

Malenkostna napaka je v tem, da se s skrčenjem rok zmanjšal tudi vztrajnostni moment fanta.

6. Toplota

Ker je v nadaljevanju v reviji ER toplota obdelana predvsem v obsegu, ki je zanimiv za tehnika praktika, bomo poleg nekaj dodatnih zgledov predstavili predvsem strukturno povezavo fizikalnih veličin pri prevajanju toplote.

Prevajanje toplote

Pri prevajanju toplote smo se namreč prvič srečali s skalarnimi in vektorskimi polji. Kot skalarno ali vektorsko polje je definiran prostor, ki ga v vsaki točki prostora označuje neka skalarna ali vektorska veličina. Prostor izpolnjuje snov z znano snovno lastnostjo. Poznamo povzročitelja fizikalnega pojava in posledico, ki jo ta povzroča. Medsebojno povezanost vseh fizikalnih veličin v tem prostoru poznamo, zato je iz podanih podatkov jasno razvidna pot reševanja problema. To grafično predstavitev povezanosti fizikalnih veličin bomo sedaj prvič predstavili pri prevajanju toplote. Enako strukturno povezanost fizikalnih veličin bomo kasneje pri obravnavanju elektrotehnike še trikrat spoznali.

Tako je povzročitelj prevajanja toplote temperaturna razlika ΔT [K]. Ker ta v snovi povzroča napeto stanje prostora, ki bi jo v primerjavi z elektrotehniko smeli imenovati **toplotna napetost**. Del toplotne napetosti, ki se porabi za prenos toplote na enoto dolžine, imenujemo **toplotna poljska jakost** E_t , ki kot vektor deluje v smeri največjega padca temperature [J/s],

$$E_t = \left. \frac{\Delta T}{\Delta l} \right|_{\text{max}} \quad [\text{K/m}],$$

Kako uspešno snov prevaja toploto, pa je odvisno od snovi, ki izpolnjuje prostor, to je od njene snovne lastnosti λ , ki jo imenujemo svojsko **toplotno prevodnost snovi**.

Količino toplote, ki gre skozi enoto ploskve v sekundi imenujemo **gostoto toplotnega toka** j_t , podana je z

$$j_t = \lambda \cdot E_t \quad [\text{J/m}^2 \cdot \text{s}],$$

Količino toplote, ki gre skozi ploskev S v enoti časa imenujemo **toplotni tok** Φ_t

$$\Phi_t = j_t \cdot S = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \text{ [J/s]},$$

ki je posledica temperaturne razlike. Celoten potek izračuna toplotnega pretoka od podane temperaturne razlike je podan s strukturno shemo, ki pelje od povzročitelja do posledice.

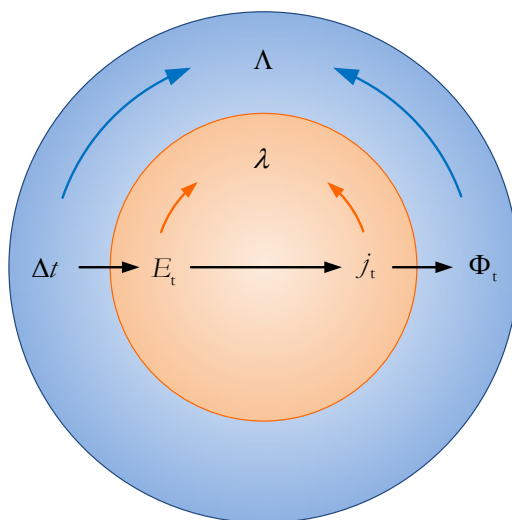
$$\Delta T \Rightarrow \left. \frac{\Delta T}{\Delta l} \right|_{\max} \Rightarrow j_t \Rightarrow P_t$$

Ker se bomo s skoraj identično strukturno shemo srečali kasneje v razlagi pojavov elektrotehnike še trikrat, si jo bomo ogledali in razložili že tu.

Nek fizikalni pojav dobro razumemo šele tedaj, če znamo odgovoriti na naslednja vprašanja:

- Kdo je povzročitelj fizikalnega pojava in kaj je njegova končna posledica?
- Katere fizikalne veličine poleg povzročitelja še dodatno vplivajo na potek pojava?
- Katere veličine v pojavu so skalarji in katere vektorji?
- Katere od nastopajočih veličin so diferencialne odnosno integralne veličine?

Vse to je lepo razvidno iz medsebojne strukturne povezave v pojavu nastopajočih fizikalnih veličin.



Strukturna povezanost **fizikalnih veličin** v prevajanju toplote

Kaj vse je razvidno iz strukturne sheme?

- Vse veličine v zunanjem krogu so **integralne** veličine, torej veljajo za celotni obravnavani prostor.
- Vse veličine v zunanjem krogu so **skalarji**, imajo le vrednost, ne pa smeri.
- Vse veličine v notranjem krogu so **diferencialne** veličine, veljajo le v dani točki prostora, oziroma na enoto poti, enoto ploskve oziroma enoto prostornine.
- Diferencialni veličini na enoto poti in enoto ploskve sta vektorja

$$\left. \frac{\Delta T}{\Delta l} \right|_{\max} = \vec{E}_t \quad \text{in} \quad \left. \frac{\Delta \Phi_t}{\Delta S} \right|_{\max} = \vec{j}_t$$

e) Snovna lastnost **svojska toplotna prevodnost** je definirana kot količnik diferencialnih veličin posledice in vzroka

$$\lambda = \frac{j_t}{E}$$

f) Snovno-geometrijska lastnost toplotnega polja- **toplotna prevodnost** je definirana količnik integralnih veličin posledice in vzroka

$$\mathcal{A} = \frac{\Phi_t}{\Delta T}$$

Ker imamo v prehajanju toplote večinoma opravka predvsem s homogenimi tokovnimi polji, je primerjava s homogenim tokovnim poljem za elektrotehnike zelo poučna. Iz znanih izrazov za električna vezja lahko zapišemo mnoge izraze pri prevajanju toplote.

$$\gamma = \frac{1}{\rho} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{\rho_t}$$

Ohmske prevodnosti in toplotne prevodnosti

$$G = \frac{\gamma \cdot S}{l} \Leftrightarrow \mathcal{A} = \frac{\lambda \cdot S}{l}$$

ter enako oblikovana Ohmova zakona

$$U = I \cdot G \Leftrightarrow \Delta T = \Phi_t \cdot \mathcal{A}$$

Za vzporedno namestitve velja

$$G = G_1 + G_2 \Leftrightarrow \mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$$

in za zaporedno namestitve

$$R = R_1 + R_2 \Leftrightarrow R_t = R_{t1} + R_{t2}$$

Ker elektrotehnikom reševanje enostavnih uporovnih vezij ne predstavlja problema, ga tudi prevajanje toplote ne bi smelo.

Segrevanje

Ker je razlaga segrevanja v nadaljevanju v reviji ER zadostna, si tu oglejmo le nekaj dodatnih zgledov.

Zgled

Imamo $m = 5$ kg ledu, ki je na tem, da se stopi (ima temperaturo $T_1 = 0$ °C). Segrevamo ga z električnim grelcem z močjo $P = 1$ kW toliko časa, da se ves stopi. Talilna toplota ledu je $q_t = 336$ kJ/kg.

Koliko toplote Q moramo dovesti, da se ves stopi?

Koliko časa ga moramo taliti, če ima grelec izkoristek $\eta = 85\%$?

Potrebna toplotna energija Q je:

$$Q = m \cdot q_t = 5 \cdot 336 = 1680 \text{ kJ}$$

Zaradi izkoristka je dovedena električna energija

$$W_{\text{el}} = \frac{Q}{\eta} = \frac{1,68}{0,85} = 1,976 \text{ MJ}$$

To spremenimo v kWh

$$W_{\text{el}} = \frac{1,976}{3,6} = 0,549 \text{ kWh}$$

$$W_{\text{el}} = P \cdot t$$

dobimo potrebni čas segrevanja

$$t = \frac{W_{\text{el}}}{P} = \frac{0,549}{1} = 0,549 \text{ [h]} = 32,94 \text{ [min]} = 32 \text{ min } 56 \text{ s} \sim 33 \text{ min}$$

Mešanje snovi različnih agregatnih stanj

Ko se snov segreva toplotno energijo sprejema, ko se ohlaja jo pa oddaja. Pri mešanju snovi različnih agregatnih stanj mora biti pri ohlajanju oddana energija enaka tisti potrebni za segrevanje.

Zgled

V izolirano posodo smo dali $m_1 = 2 \text{ kg}$ ledu s temperaturo $T_1 = -10^\circ\text{C}$ in $m_{v2} = 4 \text{ kg}$ vode s temperaturo $T_v = 10^\circ\text{C}$. Kolikšno količino pare m_p s temperaturo $T_p = 100^\circ\text{C}$ moramo dodati, da bo zmes imela temperaturo $T_{\text{z}} = 20^\circ\text{C}$.

Podatki o snoveh so: $c_l = 2,1 \text{ kJ/kgK}$, $q_t = 336 \text{ kJ/kgK}$, $c_v = 4,2 \text{ kJ/kgK}$, $c_{iz} = 2260 \text{ kJ/kgK}$

Najprej izračunamo toplotno energijo za segrevanje in taljenje ledu

$Q_L = m_1 \cdot (c_l \cdot \Delta T_1 + q_t) = 2 \cdot (2,1 \cdot 10 + 336) = 378 \text{ kJ}$. Potem izračunamo potrebno toplotno energijo za segrevanje obeh vod

$$Q_v = (m_{v1} \cdot c_v \cdot \Delta T_1 + m_{v2} \cdot c_v \cdot \Delta T_2) = 2 \cdot 4,2 \cdot 20 + 4 \cdot 4,2 \cdot 10 = 336 \text{ kJ}$$

Skupno potrebujemo za segrevanje toplotno energijo

$$Q_s = Q_L + Q_v = 714 \text{ kJ}$$

Prav tako veliko toplotno energijo mora oddati para pri ohlajanju

$$m_p \cdot (q_{iz} + c_v \cdot \Delta T) = Q_{\text{oh}}$$

Odtod določimo potrebno maso pare

$$m_p = \frac{Q_{\text{oh}}}{q_{iz} + c_v \cdot \Delta T} = \frac{714}{2260 + 4,2 \cdot 80} = 0,275 \text{ kg}$$

Vodni kalorimeter

Na principu segrevanja snovi deluje naprava, s katero določamo specifično toploto kovin. Imenujemo jo **kalorimeter**. Ker je en od snovi vedno voda, je to vodni kalorimeter.

Kalorimeter je toplotno izredno dobro izolirana posoda (termovka). V kalorimeter vstavimo najprej m_v kilogramov (litrov) vode s temperaturo vode T_v . Kovini stehtamo maso m_k in nato segrejemo na temperaturo T_k . Segreto kovino vstavimo v vodo in počakamo, da dobita kovina in voda zmesno temperaturo T_z . Kovina odda toliko toplotne energije, kot jo voda sprejme

$$m_k \cdot c_k \cdot (T_k - T_z) = m_v \cdot c_v \cdot (T_z - T_v)$$

Odtod določimo specifično toploto kovine

$$c_k = \frac{m_v \cdot c_v \cdot (T_z - T_v)}{m_k \cdot (T_k - T_z)} \text{ [kJ/kgK]}$$

Izračun lahko tudi obrnemo. Če specifično toploto kovine poznamo, lahko določimo temperaturo T_k , na katero je bila segreta.

Zgled

Kalorimeter vsebuje $m_v = 3$ kg vode s temperaturo $T_v = 20$ °C. Nato vržemo v vodo segret kos železa z maso $m_{Fe} = 1,5$ kg in izmerimo zmesno temperaturo $T_z = 40$ °C. Specifična toplota železa je $c_{Fe} = 0,46$ kJ/kgK.

Kolikšna je bila temperatura železa T_{Fe} ?

Rešitev

V enačbo

$$m_{Fe} \cdot c_{Fe} \cdot (T_{Fe} - T_z) = m_v \cdot c_v \cdot (T_z - T_v)$$

Vstavimo znane vrednosti

$$1,5 \cdot 0,46 \cdot (T_{Fe} - 40) = 3 \cdot 4,2 \cdot 20$$

$$1,5 \cdot 0,46 \cdot T_{Fe} - 1,5 \cdot 0,46 \cdot 40 = 3 \cdot 4,2 \cdot 20$$

$$T_{Fe} = \frac{27,6 + 252}{0,69} = 405 \text{ °C}$$

Prevajanje toplote

Prevajanje toplote je za tehniško prakso eden od izredno pomembnih procesov. Vsi pa spadajo v dve vrsti:

- Problemi hlajenja**, ko želimo toploto čim prej odvesti. Svojska prevodnost snovi mora biti čim večja.
- Problemi ogrevanja**, ko želimo odhod toplote čim bolj preprečiti. Svojska prevodnost snovi mora biti čim manjša.

Drug bistveni princip prevajanja toplote je zajet v zaporedni ali vzporedni namestitvi snovi. Če sta snovi nameščeni **vzporedno** se toplotni **prevodnosti seštevata**.

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$$

Če sta snovi nameščeni **zaporedno**, se toplotni **upornosti seštevata**.

$$R_t = R_{t1} + R_{t2}$$

Hladilna skrinja je praktični zgled, kako želimo vstop toplote v hladilno skrinjo preprečiti.

Zgled

Hladilna skrinja ima notranjo površino $S=5 \text{ m}^2$. Debelina izolacije je $d = 5 \text{ cm}$. Izolacija ima toplotno prevodnost $\lambda = 0,05 \text{ [W/kgK]}$. Zunanja temperatura je $T_z = 20 \text{ }^\circ\text{C}$, v notranjosti skrinje naj bo temperatura $T_n = -10 \text{ }^\circ\text{C}$. Izkoristek hladilne naprave je $\eta = 0,8$.

Kolikšna je toplotna prevodnost Λ stene hladilne skrinje?

Kolikšna je gostota toplotnega toka j_t ?

Kolikšen je toplotni tok P_t ?

Koliko toplote Q mora hladilna naprava odvesti v eni uri?

Rešitev

Toplotna prevodnost stene hladilne skrinje je

$$\Lambda = \frac{\lambda \cdot S}{d} = \frac{0,05 \cdot 5}{0,05} = 5 \text{ Wm/kgK}$$

Gostota toplotnega toka je

$$j_t = \frac{\lambda \cdot \Delta T}{d} = \frac{0,05 \cdot 30}{0,05} = 30 \text{ W/m}^2$$

Toplotni tok P_t je

$$P_t = j_t \cdot S = 30 \cdot 5 = 150 \text{ W}$$

V eni uri mora hladilna naprava odvesti toploto Q

$$Q = P_t \cdot t = 150 \cdot 3600 = 540 \text{ kJ}$$

Hladilna naprava potrebuje električno moč

$$P_{el} = \frac{P_t}{\eta} = \frac{150}{0,8} = 187,5 \text{ W}$$

Veliko tudi zelo zahtevnih zgledov najdete v navedeni literaturi. Veliko tega dobimo tudi na spletnih straneh.

Literatura:

Rudolf Kladnik: Fizika: Energija, toplota, zvok, svetloba DZS, Ljubljana 2010

D. Rašković: Mehanika, Dinamika, Naučna knjiga, Beograd, 1956

Maks Oblak: Rešene naloge iz dinamike, Zbrano gradivo Fakulteta za strojništvo, Univerza v Mariboru, Maribor 2002

Hinko Šolinc: Skozi fiziko z rešenimi nalogami, Toplota, Zbirka nalog, DZS Ljubljana 2000

Leopold Škerget, Jure Ravnik: Prenos toplote: Zbirka rešenih nalog, Fakulteta za strojništvo, Univerza v Mariboru, Maribor 2011