

Tehniška matematika 2a

Ulomki in linearna enačba

Avtorji: Gordana Radić, Peter Kitak, Tine Zorič

1 Uvod

V drugem nadaljevanju Tehniške matematike, ki je v Elektrotehniški reviji izšla junija 2014, smo

- predstavili matematični izraz ulomek in osnovne operacije nad ulomki (seštevanje in odštevanje, množenje in deljenje, potenciranje in korenjenje);
- vpeljali medsebojno matematično odvisnost dveh veličin - linearno funkcijo;
- predstavili, kakšen je pomen natančnosti pri računanju.

Za dopolnitev bomo v nadaljevanju najprej povedali kaj več o operacijah nad ulomki, ki vsebujejo naravna števila ali matematične izraze, nato pa opisali še nekatere operacije povezane z linearno funkcijo.

2 Racionalna števila

Racionalno število je število, ki ga lahko zapišemo v obliki ulomka tako, da v števcu in imenovalcu nastopata naravni števili. V tem poglavju sledi pregled vseh osnovnih operacij nad racionalnimi števili, ki se navadno uporabljajo v tehniki. Zapomnimo si lahko, da je ulomek manjši od 1, če je števec manjši od imenovalca in je ulomek večji od ena, če je števec večji od imenovalca.

2.1 Razširjanje in krajšanje ulomkov

Uloomek se ne spremeni, če števec in imenovalec pomnožimo ali delimo z istim številom (seveda različnim od 0). Prvi operaciji pravimo razširjanje, drugi pa krajšanje ulomka. Navadno ulomke zapišemo v njihovi **primitivni obliki** (to je oblika, kjer sta števec in imenovalec tuji si števili - njun največji skupni delitelj je 1). To dosežemo, ko števec in imenovalec delimo z njunim največjim skupnim deliteljem.

Zgled. Okrajšaj ulomke: $\frac{7}{56}, \frac{30}{42}, \frac{-45}{225}, \frac{5940}{7560}$

$$(i) \ D(7, 56) = 7, \text{ zato je } \frac{7}{56} = \frac{\cancel{7} \cdot 1}{\cancel{7} \cdot 8} = \frac{1}{8}$$

$$(ii) \ D(30, 42) = 6, \text{ zato je } \frac{30}{42} = \frac{\cancel{6} \cdot 5}{\cancel{6} \cdot 7} = \frac{5}{7}$$

$$(iii) \ D(45, 225) = 45, \text{ zato je } \frac{-45}{225} = \frac{-1 \cdot \cancel{45}}{\cancel{45} \cdot 5} = -\frac{1}{5}$$

$$(iv) \ D(5940, 7560) = 540, \text{ zato je } \frac{5940}{7560} = \frac{\cancel{540} \cdot 11}{\cancel{540} \cdot 14} = \frac{11}{14}$$

2.2 Seštevanje in odštevanje ulomkov

Pri razširjanju ulomkov na skupni imenovalac izberemo navadno najmanjši skupni večkratnik vseh imenovalcev.

Primeri. Izračunaj

$$(1) \frac{1}{2} + \frac{3}{5} - \frac{4}{7}$$

Rešitev: Najprej poiščemo najmanjši skupni večkratnik: $v(2, 5, 7) = 70$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{5} - \frac{4}{7} = \frac{1 \cdot 35}{2 \cdot 35} + \frac{3 \cdot 14}{5 \cdot 14} - \frac{4 \cdot 10}{7 \cdot 10} = \frac{35 + 42 - 40}{70} = \frac{37}{70}$$

$$(2) \frac{3}{4} - \frac{2}{3} + \frac{5}{6}$$

Rešitev: Najprej poiščemo najmanjši skupni večkratnik: $v(4, 3, 6) = 12$

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} - \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} + \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{9 - 8 + 10}{12} = \frac{11}{12}$$

$$(3) \frac{19}{20} + \frac{1}{8} - \frac{2}{5} - \frac{7}{10}$$

Rešitev: Najprej poiščemo najmanjši skupni večkratnik: $v(20, 8, 5, 10) = 40$

$$\frac{19}{20} + \frac{1}{8} - \frac{2}{5} - \frac{7}{10} = \frac{19 \cdot 2}{20 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 5}{8 \cdot 5} - \frac{2 \cdot 8}{5 \cdot 8} - \frac{7 \cdot 4}{10 \cdot 4} = \frac{38 + 5 - 16 - 28}{40} = \frac{-1}{40}$$

$$(4) \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{5}{6} + \frac{7}{8} - \frac{7}{24}$$

Rešitev: Najprej poiščemo najmanjši skupni večkratnik: $v(2, 4, 6, 8, 24) = 24$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{5}{6} + \frac{7}{8} - \frac{7}{24} = \frac{1 \cdot 12}{2 \cdot 12} + \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 6} - \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 4} + \frac{7 \cdot 3}{8 \cdot 3} - \frac{7}{24} = \frac{12 + 18 - 20 + 21 - 7}{24} = \frac{24}{24} = 1$$

$$(5) \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{6} - \frac{2}{9} - \frac{7}{12}$$

Rešitev: Najprej poiščemo najmanjši skupni večkratnik: $v(3, 4, 6, 9, 12) = 36$

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{6} - \frac{2}{9} - \frac{7}{12} &= \frac{2 \cdot 12}{3 \cdot 12} + \frac{1 \cdot 9}{4 \cdot 9} + \frac{5 \cdot 6}{6 \cdot 6} - \frac{2 \cdot 4}{9 \cdot 4} - \frac{7 \cdot 3}{12 \cdot 3} = \frac{24 + 9 + 30 - 8 - 21}{36} \\ &= \frac{34}{36} = \frac{17}{18} \end{aligned}$$

2.3 Dvojni ulomki

Dvojni ulomek je ulomek, ki ima v števcu in/ali imenovalcu spet ulomek. Razrešimo ga na naslednji način

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{c \cdot b}$$

Primeri. Izračunaj.

$$(1) \quad \frac{\frac{5}{6}}{\frac{35}{24}} = \frac{5 \cdot 24}{35 \cdot 6} = \frac{\cancel{5} \cdot \cancel{6} \cdot 4}{\cancel{5} \cdot 7 \cdot \cancel{6}} = \frac{4}{7}$$

$$(2) \quad \frac{\frac{1}{3} - \frac{5}{19}}{\frac{2}{3} - \frac{10}{19}} = \frac{\frac{19-5 \cdot 3}{57}}{\frac{2 \cdot 19 - 10 \cdot 3}{57}} = \frac{\frac{4}{57}}{\frac{8}{57}} = \frac{4 \cdot \cancel{57}}{8 \cdot \cancel{57}} = \frac{\cancel{4} \cdot 1}{\cancel{4} \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$(3) \quad \frac{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}} = \frac{\frac{6+2 \cdot 4+3 \cdot 3}{12}}{\frac{20+15-12}{60}} = \frac{\frac{23}{12}}{\frac{23}{60}} = \frac{\cancel{23} \cdot 60}{\cancel{23} \cdot 12} = \frac{\cancel{12} \cdot 5}{\cancel{12}} = 5$$

$$(4) \quad \frac{\frac{4}{9} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{1}{6}}{\frac{17}{24} + \frac{3}{8} - \frac{5}{6}} = \frac{\frac{4 \cdot 4 + 2 \cdot 12 - 3 \cdot 9 + 6}{36}}{\frac{17+3 \cdot 3 - 5 \cdot 4}{24}} = \frac{\frac{19}{36}}{\frac{6}{24}} = \frac{19 \cdot 24}{6 \cdot 36} = \frac{19 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{4}}{\cancel{6} \cdot 9 \cdot \cancel{4}} = \frac{19}{9}$$

$$(5) \quad \frac{\frac{3}{4} - \frac{2}{5}}{1 + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{\frac{3 \cdot 5 - 2 \cdot 4}{20}}{1 + \frac{6}{20}} = \frac{\frac{7}{20}}{\frac{20+6}{20}} = \frac{\frac{7}{20}}{\frac{26}{20}} = \frac{7 \cdot \cancel{20}}{26 \cdot \cancel{20}} = \frac{7}{26}$$

3 Ulomki z algebrskimi izrazi

Kadar v števcu in/ali imenovalcu nastopa algebrski izraz, delujemo podobno, kot če bi nastopala števila:

- (i) števec in imenovalec pokrajšamo z njunim največjim skupnim deliteljem;
- (ii) ulomke lahko seštevamo ali odštevamo zgolj v primeru, ko imajo iste imenovalce - če ta pogoj ni izpolnjen, ulomke razširimo na najmanjši skupni večkratnik vseh imenovalcev.

Včasih je bolje kot iskati največji skupni delitelj med števcem in imenovalcem, sproti ulomek krajšati s členi, ki se ponovijo tako v števcu kot imenovalcu.

Zgledi. Okrajšaj ulomke: $\frac{15xy}{3y}$, $\frac{17abc}{51bcd}$ in $\frac{7(3a-b)}{21(3a-b)^3}$

- (i) Najprej poiščemo največji skupni delitelj, $D(15xy, 3y) = 3y$, zato je

$$\frac{15xy}{3y} = \frac{\cancel{3y} \cdot 5x}{\cancel{3y}} = 5x$$

- (ii) Poiščemo največji skupni delitelj, $D(17abc, 51bcd) = 17bc$, zato je

$$\frac{17abc}{51bcd} = \frac{\cancel{17bc} \cdot a}{\cancel{17bc} \cdot 3d} = \frac{a}{3d}$$

(iii) Poiščemo največji skupni delitelj, $D(7(3a - b), 21(3a - b)^3) = 7(3a - b)$, zato je

$$\frac{7(3a - b)}{21(3a - b)^3} = \frac{\cancel{7(3a - b)} \cdot 1}{\cancel{7(3a - b)} \cdot 3(3a - b)^2} = \frac{1}{3(3a - b)^2}$$

Poskusimo nalogo rešiti še na drug način, tako da krajšamo ulomke s členi, ki se ponavljajo tako v števcu kot imenovalcu

$$\frac{7(3a - b)}{21(3a - b)^3} = \frac{\cancel{7} \cdot \cancel{(3a - b)}}{\cancel{7} \cdot 3 \cdot (3a - b)^{\cancel{3}^2}} = \frac{1}{3(3a - b)^2}$$

Primeri.

(1) Okrajšaj ulomke.

$$(a) \frac{ac + bc - dc}{c^2} = \frac{\cancel{c} \cdot (a + b - d)}{\cancel{c} \cdot c} = \frac{a + b - d}{c}$$

$$(b) \frac{6x - 18y}{4x - 12y} = \frac{6 \cdot \cancel{(x - 3y)}}{4 \cdot \cancel{(x - 3y)}} = \frac{3 \cdot \cancel{2}}{2 \cdot \cancel{2}} = \frac{3}{2}$$

$$(c) \frac{x^3y^2 + xy^3}{3xy^2} = \frac{\cancel{xy^2} \cdot (x^2 + y)}{3 \cdot \cancel{xy^2}} = \frac{x^2 + y}{3}$$

$$(d) \frac{x^2 - 36}{x + 6} = \frac{(x - 6) \cdot \cancel{(x + 6)}}{\cancel{(x + 6)}} = x - 6$$

$$(e) \frac{7a - 7b}{a^2 - b^2} = \frac{7 \cdot \cancel{(a - b)}}{\cancel{(a - b)} \cdot (a + b)} = \frac{7}{a + b}$$

$$(f) \frac{10xy^2 - 12x^3}{36x^2 - 25y^2} = \frac{2x^2 \cdot (5y - 6x)}{(6x - 5y) \cdot (6x + 5y)} = \frac{-2x^2 \cdot \cancel{(6x - 5y)}}{\cancel{(6x - 5y)} (6x + 5y)} = -\frac{2x^2}{6x + 5y}$$

$$(g) \frac{a^2 - 14a + 49}{a^2 - 49} = \frac{(a - 7)^2}{(a - 7) \cdot (a + 7)} = \frac{\cancel{(a - 7)} \cdot (a - 7)}{\cancel{(a - 7)} \cdot (a + 7)} = \frac{a - 7}{a + 7}$$

$$(h) \frac{4x^2 - 25y^2}{4x^2 - 20xy + 25y^2} = \frac{(2x - 5y) \cdot (2x + 5y)}{(2x - 5y)^2} = \frac{\cancel{(2x - 5y)} \cdot (2x + 5y)}{\cancel{(2x - 5y)} \cdot (2x - 5y)} = \frac{2x + 5y}{2x - 5y}$$

$$(i) \frac{a^3 - 16a}{a^3 - 9a^2 + 20a} = \frac{\cancel{a} \cdot (a^2 - 16)}{\cancel{a} \cdot (a^2 - 9a + 20)} = \frac{\cancel{(a - 4)} \cdot (a + 4)}{\cancel{(a - 4)} \cdot (a - 5)} = \frac{a + 4}{a - 5}$$

$$(j) \frac{x^3 + 1}{x^3 + x^2} = \frac{\cancel{(x + 1)} \cdot (x^2 - x + 1)}{x^2 \cdot \cancel{(x + 1)}} = \frac{x^2 - x + 1}{x^2}$$

$$(k) \frac{x^3 - 4x^2 - 21x}{x^4 + 27x} = \frac{\cancel{x} \cdot (x^2 - 4x - 21)}{\cancel{x} \cdot (x^3 + 27)} = \frac{\cancel{(x + 3)} \cdot (x - 7)}{\cancel{(x + 3)} \cdot (x^2 - 3x + 9)} = \frac{x - 7}{x^2 - 3x + 9}$$

$$(l) \frac{x^4 - 81}{x^3 - 3x^2 + 9x - 27} = \frac{(x^2 - 9) \cdot (x^2 + 9)}{x^2 \cdot (x - 3) + 9 \cdot (x - 3)} = \frac{\cancel{(x - 3)} \cdot (x + 3) \cdot \cancel{(x^2 + 9)}}{\cancel{(x - 3)} \cdot \cancel{(x^2 + 9)}} = x + 3$$

(2) Seštej ulomke.

$$(a) \frac{2x}{3} + \frac{x}{2} - \frac{4x}{5}$$

Rešitev: Najprej poiščemo $v(3, 2, 5) = 30$. Potem pa je

$$\frac{2x}{3} + \frac{x}{2} - \frac{4x}{5} = \frac{2x \cdot \textcolor{brown}{10} + x \cdot \textcolor{brown}{15} - 4x \cdot \textcolor{brown}{6}}{30} = \frac{11x}{30}$$

$$(b) \frac{1}{y^2} - \frac{3}{xy} + \frac{9}{4x^2}$$

Rešitev: Poiščemo $v(y^2, xy, 4x^2) = 4x^2y^2$ in je

$$\frac{1}{y^2} - \frac{3}{xy} + \frac{9}{4x^2} = \frac{1 \cdot 4x^2 - 3 \cdot 4xy + 9 \cdot y^2}{4x^2y^2} = \frac{4x^2 - 12xy + 9y^2}{4x^2y^2} = \frac{(2x - 3y)^2}{4x^2y^2}$$

$$(c) \frac{1}{x-7} - \frac{1}{x+7}$$

Rešitev: Poiščemo $v(x-7, x+7) = (x-7) \cdot (x+7)$ in je

$$\frac{1}{x-7} - \frac{1}{x+7} = \frac{1 \cdot (x+7) - 1 \cdot (x-7)}{(x-7) \cdot (x+7)} = \frac{14}{(x-7) \cdot (x+7)}$$

$$(d) \frac{6u+7}{u-2} + \frac{5u+9}{2-u}$$

Rešitev: Poiščemo $v(u-2, 2-u) = u-2$ in je

$$\frac{6u+7}{u-2} + \frac{5u+9}{2-u} = \frac{6u+7 + (5u+9) \cdot (-1)}{u-2} = \frac{(u-2) \cdot 1}{(u-2) \cdot 1} = 1$$

$$(e) \frac{v-4}{v+4} - \frac{16v}{16-v^2}$$

Rešitev: Poiščemo $v(v+4, 16-v^2) = (4+v) \cdot (4-v)$ in je

$$\begin{aligned} \frac{v-4}{v+4} - \frac{16v}{16-v^2} &= \frac{(v-4) \cdot (4-v) - 16v}{(4+v) \cdot (4-v)} = \frac{-v^2 - 8v - 16}{(4+v) \cdot (4-v)} = -\frac{(v+4) \cdot (v+4)}{(4-v) \cdot (v+4)} \\ &= -\frac{v+4}{v-4} \end{aligned}$$

$$(f) \frac{2}{a-b} - \frac{1}{a+b} - \frac{2b}{a^2-b^2}$$

Rešitev: Poiščemo $v(a-b, a+b, a^2-b^2) = (a-b) \cdot (a+b)$ in je

$$\frac{2}{a-b} - \frac{1}{a+b} - \frac{2b}{a^2-b^2} = \frac{2 \cdot (a+b) - (a-b) - 2b}{(a-b) \cdot (a+b)} = \frac{a-b}{(a-b) \cdot (a+b)} = \frac{1}{a+b}$$

$$(g) \frac{7x+15y}{6(x-y)} + \frac{x-3y}{x-y} - \frac{4x+y}{3(x-y)}$$

Rešitev: Poiščemo $v(6(x-y), x-y, 3(x-y)) = 6(x-y)$ in je

$$\begin{aligned} \frac{7x+15y}{6(x-y)} + \frac{x-3y}{x-y} - \frac{4x+y}{3(x-y)} &= \frac{(7x+15y) + 6 \cdot (x-3y) - 2 \cdot (4x+y)}{6(x-y)} = \frac{5x-5y}{6(x-y)} \\ &= \frac{5 \cdot (x-y)}{6 \cdot (x-y)} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

$$(h) \frac{2}{x^2 - 1} + \frac{2x - 3}{x^2 + x} - \frac{x}{x^2 - x}$$

Rešitev: Poiščemo $v(x^2 - 1, x^2 + x, x^2 - x) = x \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)$ in je

$$\begin{aligned} \frac{2}{x^2 - 1} + \frac{2x - 3}{x^2 + x} - \frac{x}{x^2 - x} &= \frac{2 \cdot x + (2x - 3) \cdot (x - 1) - x \cdot (x + 1)}{x \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)} = \frac{x^2 - 4x + 3}{x \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)} \\ &= \frac{(x - 3) \cdot (x - 1)}{x \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)} = \frac{x - 3}{x \cdot (x + 1)} \end{aligned}$$

(4) Izračunaj.

$$\begin{aligned} (a) \quad & \frac{13(u^2 - 4v^2)}{36(u + 2v)^2} \cdot 18(u - 2v) \\ &= \frac{13 \cdot (u - 2v) \cdot (u + 2v)}{18 \cdot 2 \cdot (u + 2v) \cdot (u + 2v)} \cdot 18(u - 2v) \\ &= \frac{13(u - 2v)^2}{2(u + 2v)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \quad & \frac{x^2 - 9y^2}{z} \cdot \frac{z^2}{(x - 3y)^2} \\ &= \frac{(x - 3y) \cdot (x + 3y)}{z} \cdot \frac{z \cdot z}{(x - 3y) \cdot (x - 3y)} \\ &= \frac{z(x + 3y)}{x - 3y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (c) \quad & \frac{x^3 - 8}{x^3 + 8} \cdot \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 4} \\ &= \frac{(x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 4)}{(x + 2) \cdot (x^2 - 2x + 4)} \cdot \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 4} \\ &= \frac{x - 2}{x^2 - 2x + 4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (d) \quad & \frac{25x^2 - 1}{x^2} \cdot \frac{5x^3 + x^2}{5x - 1} \\ &= \frac{(5x - 1) \cdot (5x + 1)}{x^2} \cdot \frac{x^2 \cdot (5x + 1)}{5x - 1} \\ &= (5x + 1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (e) \quad & \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 9x} \cdot \frac{3x^2 - 21x - 54}{x^2 - 4} \\ &= \frac{(x - 2) \cdot (x - 2)}{x \cdot (x - 9)} \cdot \frac{3 \cdot (x - 9) \cdot (x + 2)}{(x - 2) \cdot (x + 2)} \\ &= \frac{3(x - 2)}{x} \end{aligned}$$

(5) Deli ulomke.

$$(a) \frac{x-y}{7x^2+xy} : \frac{x+y}{21x+3y}$$

$$= \frac{x-y}{x \cdot \cancel{(7x+y)}} \cdot \frac{3 \cdot \cancel{(7x+y)}}{x+y}$$

$$= \frac{3 \cdot (x-y)}{x \cdot (x+y)}$$

$$(b) \frac{x^3-5x^2y}{y^2} : \frac{x^2-5xy}{y}$$

$$= \frac{x^{\cancel{2}} \cdot \cancel{(x-5y)}}{y^{\cancel{2}}} \cdot \frac{y}{x \cdot \cancel{(x-5y)}}$$

$$= \frac{x}{y}$$

$$(c) \frac{5x^2+30x}{x^2-36} : \frac{x^4+8x^3}{x^2+2x-48}$$

$$= \frac{5 \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{(x+6)}}{\cancel{(x-6)} \cdot \cancel{(x+6)}} \cdot \frac{\cancel{(x+8)} \cdot \cancel{(x-6)}}{x^{\cancel{2}} \cdot \cancel{(x+8)}}$$

$$= \frac{5}{x^2}$$

$$(d) \frac{x^3+x^2-49x-49}{x^2+12x+35} : \frac{x^5-6x^4-7x^3}{x^3+125}$$

$$= \frac{x^2 \cdot (x+1) - 49 \cdot (x+1)}{\cancel{(x+5)} \cdot (x+7)} \cdot \frac{\cancel{(x+5)} \cdot (x^2-5x+25)}{x^3 \cdot (x^2-6x-7)}$$

$$= \frac{\cancel{(x+1)} \cdot (x^2-49)}{x+7} \cdot \frac{x^2-5x+25}{x^3 \cdot (x-7) \cdot \cancel{(x+1)}}$$

$$= \frac{\cancel{(x-7)} \cdot \cancel{(x+7)}}{x+\cancel{7}} \cdot \frac{x^2-5x+25}{x^3 \cdot \cancel{(x-7)}}$$

$$= \frac{x^2-5x+25}{x^3}$$

$$(e) \frac{x^4-81}{x^2-7x-30} : \frac{x^3-3x^2+9x-27}{x^4-10x^3}$$

$$= \frac{(x^2-9) \cdot (x^2+9)}{\cancel{(x-10)} \cdot (x+3)} \cdot \frac{x^3 \cdot \cancel{(x-10)}}{(x-3)^3}$$

$$= \frac{\cancel{(x-3)} \cdot \cancel{(x+3)} \cdot (x^2+9)}{x+\cancel{3}} \cdot \frac{x^3}{(x-3)^{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{x^3 \cdot (x^2+9)}{(x-3)^2}$$

$$\begin{aligned}
\text{(f)} \quad & \frac{x^4 - 12x^2 - 64}{y^3 + 16y} \cdot \frac{5y^2 + 80}{x^3 + 4x^2 + 4x + 16} : \frac{x^2 - 8x + 16}{y^2} \\
&= \frac{(x^2 - 16) \cdot (x^2 + 4)}{y \cdot \cancel{(y^2 + 16)}} \cdot \frac{5 \cdot \cancel{(y^2 + 16)}}{x^2 \cdot (x + 4) + 4 \cdot (x + 4)} \cdot \frac{y^2}{(x - 4)^2} \\
&= \frac{\cancel{(x - 4)} \cdot \cancel{(x + 4)} \cdot \cancel{(x^2 + 4)}}{y} \cdot \frac{5}{\cancel{(x + 4)} \cdot \cancel{(x^2 + 4)}} \cdot \frac{y \cdot \cancel{y}}{\cancel{(x - 4)} \cdot (x - 4)} \\
&= \frac{5y}{x - 4}
\end{aligned}$$

(6) Izračunaj.

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad & \left(\frac{x + 3}{x - 3} - \frac{x - 3}{x + 3} \right) : \frac{3x}{x^2 - 9} \\
&= \frac{(x + 3) \cdot (x + 3) - (x - 3) \cdot (x - 3)}{\cancel{(x - 3)} \cdot \cancel{(x + 3)}} \cdot \frac{\cancel{(x - 3)} \cdot \cancel{(x + 3)}}{3x} \\
&= \frac{12 \cdot \cancel{x}}{3 \cdot \cancel{x}} \\
&= \frac{4 \cdot \cancel{3}}{\cancel{3}} = 4 \\
\text{(b)} \quad & \left(\frac{2x - 1}{5x + 7} - \frac{2x - 3}{5x - 7} \right) : \frac{14 - 9x}{25x^2 - 49} \\
&= \frac{(2x - 1) \cdot (5x - 7) - (3x - 3) \cdot (5x + 7)}{\cancel{(5x + 7)} \cdot \cancel{(5x - 7)}} \cdot \frac{\cancel{(5x - 7)} \cdot \cancel{(5x + 7)}}{14 - 9x} \\
&= \frac{-18x + 28}{14 - 9x} \\
&= \frac{2 \cdot \cancel{(14 - 9x)}}{\cancel{14 - 9x} \cdot 1} = 2 \\
\text{(c)} \quad & \left(\frac{1}{3} - \frac{7}{x^2 - 4x} \right) \cdot \frac{x}{x - 7} : \frac{x + 3}{x^2 - 16} \\
&= \frac{x \cdot (x - 4) - 7 \cdot 3}{3 \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{(x - 4)}} \cdot \frac{\cancel{x}}{x - 7} \cdot \frac{\cancel{(x - 4)} \cdot (x + 4)}{x + 3} \\
&= \frac{x^2 - 4x - 21}{3} \cdot \frac{1}{x - 7} \cdot \frac{x + 4}{x + 3} \\
&= \frac{\cancel{(x - 7)} \cdot \cancel{(x + 3)}}{3} \cdot \frac{1}{\cancel{x - 7}} \cdot \frac{x + 4}{\cancel{x + 3}} \\
&= \frac{x + 4}{3} \\
\text{(d)} \quad & \left(\frac{x + 1}{x - 5} + \frac{x - 15}{x^2 - 5x} \right) \cdot \frac{x - 5}{x^2 + 10x + 25} : \frac{1}{x} \\
&= \frac{(x + 1) \cdot x + (x - 15)}{\cancel{x} \cdot \cancel{(x - 5)}} \cdot \frac{\cancel{x - 5}}{(x + 5)^2} \cdot \frac{\cancel{x}}{1} \\
&= \frac{x^2 + 2x - 15}{(x + 5)^2}
\end{aligned}$$

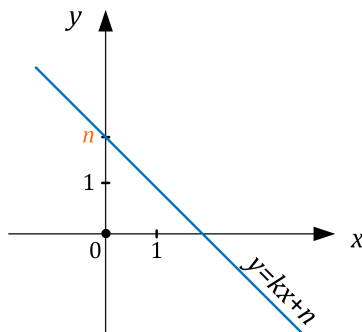
$$\begin{aligned}
&= \frac{\cancel{(x+5)} \cdot (x-3)}{\cancel{(x+5)} \cdot (x+5)} \\
&= \frac{x-3}{x+5} \\
(e) \quad &\left(\frac{2x-3y}{3xy^2} - \frac{4x+y}{2x^2y} - \frac{3x^2-14xy-7y^2}{6x^2y^2} \right) \cdot \frac{2xy}{x-2y} \\
&= \frac{\cancel{2x} \cdot (2x-3y) - \cancel{3y} \cdot (4x+y) - (3x^2-14xy-7y^2)}{6x^2y^2} \cdot \frac{2xy}{x-2y} \\
&= \frac{x^2-4xy-4y^2}{\cancel{2xy} \cdot 3xy} \cdot \frac{\cancel{2xy}}{x-2y} \\
&= \frac{(x-2y) \cdot \cancel{(x-2y)}}{3xy \cdot \cancel{(x-2y)}} \\
&= \frac{x-2y}{3xy} \\
(f) \quad &\left(\frac{x-3}{3x-4} - \frac{5x-2}{3x+4} + \frac{12x^2+3x+20}{9x^2-16} \right) : \frac{8x}{3x-4} \\
&= \frac{(x-3) \cdot \cancel{(3x+4)} - (5x-2) \cdot \cancel{(3x-4)} + (12x^2+3x+20)}{\cancel{(3x-4)} \cdot (3x+4)} \cdot \frac{\cancel{3x-4}}{8x} \\
&= \frac{24x}{3x+4} \cdot \frac{1}{8x} \\
&= \frac{\cancel{8x} \cdot 3}{\cancel{8x} \cdot (3x+4)} \\
&= \frac{3}{3x+4}
\end{aligned}$$

4 Linearna funkcija

Linearna funkcija je realna funkcija s predpisom

$$f(x) = kx + n, \quad \text{kjer sta } k, n \in \mathbb{R}.$$

Graf linearne funkcije je **premica**, ki je določena z enačbo $y = kx + n$. Pri tem konstanta k predstavlja smerni koeficient premice, konstanta n pa vrednost, kjer premica preseka ordinatno os.



Skozi dve točki v ravnini lahko potegnemo le eno samo premico, kljub temu pa poznamo več oblik enačbe premice. V *ER* smo omenili zgolj tri (prve tri), zdaj pa bomo definirali še eno več.

- (i) **Implicitna oblika** enačbe premice

$$ax + by - c = 0$$

Pri tem so $a, b, c \in \mathbb{R}$. Implicitna oblika enačbe premice nosi to ime zato, ker iz nje implicitno ni razviden noben karakterističen podatek, kot je to slučaj za ostale tri oblike.

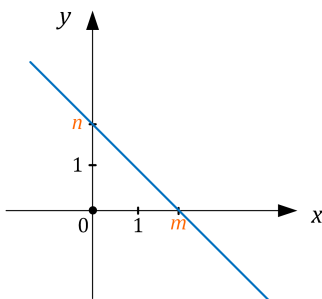
- (ii) **EksPLICITNA oblika** enačbe premice

$$y = kx + n$$

- (iii) **Odsekovna oblika** enačbe premice

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$$

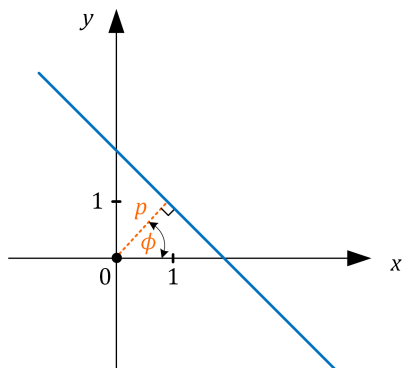
Vrednosti m in n povesta, kje premica seka abscisno oziroma ordinatno os:



- (iv) **Normalna oblika** enačbe premice

$$x \cos \phi + y \sin \phi = p$$

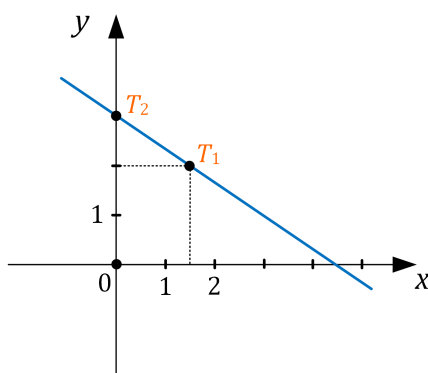
Pri tem nam konstanta p pove, za koliko enot je premica oddaljena od koordinatnega izhodišča, konstanta ϕ pa kot, ki ga razdalja oklepa s pozitivno smerjo osi x .



Za zapis enačbe premice je tako potrebno poznati le dva podatka, npr.

- koordinati dveh točk $T_1(x_1, y_1)$ in $T_2(x_2, y_2)$;
- eno točko in smerni koeficient premice k ;
- smerni koeficient premice in odsek n na y -osi;
- odseka m na x -osi in n na y -osi;
- razdaljo premice od koordinatnega izhodišča in kot ϕ , ki ga ta razdalja oklepa z x osjo.

Zgled. Določimo vse štiri oblike enačbe premice, ki gre skozi točki $T_1\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ in $T_2(0, 3)$. Najprej narišimo skico



(i) **EksPLICITNA oblika:** $y = kx + n$

Iz skice takoj dobimo začetno vrednost n , vrednost kjer premica seka y -os. Torej, $n = 3$. Smerni koeficient premice pa bomo izračunali po obrazcu

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Zato je

$$k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{2 - 3}{\frac{3}{2} - 0} = -\frac{2}{3} \quad \text{ali} \quad k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 2}{0 - \frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}.$$

Potem pa je

$$y = -\frac{2}{3}x + 3.$$

(ii) **IMPLICITNA oblika:** $ax + by + c = 0$

To obliko najenostavneje dobimo iz eksplcitne oblike tako, da vse člene premaknemo na eno stran enakosti,

$$\frac{2}{3}x + y - 3 = 0.$$

Enačbo lahko pustimo v tej obliki, še rajši pa se znebimo ulomkov, zato celotno enačbo pomnožimo s 3. Potem pa je

$$2x + 3y - 9 = 0.$$

(iii) **Odsekovna oblika:** $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$

Iz skice takoj razberemo, da je $m = \frac{9}{2}$ in $n = 3$, zato je

$$\frac{x}{\frac{9}{2}} + \frac{y}{3} = 1.$$

Če skice nimamo, si ponovno pomagamo z eksplicitno obliko enačbe tako, da spremenljivki x in y premaknemo na eno stran enačbe, prosti člen pa na drugo stran enačbe,

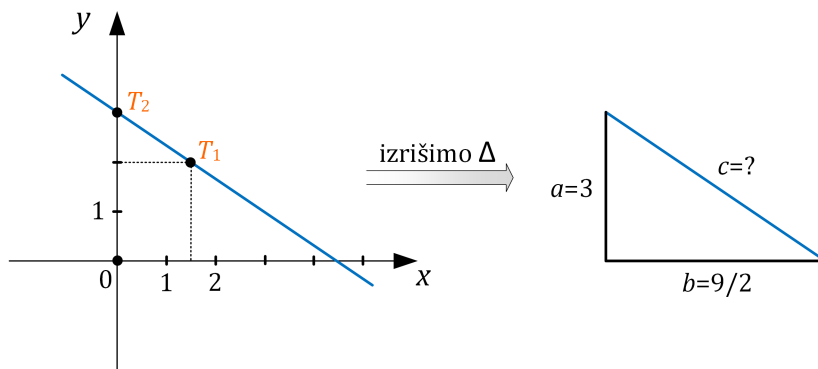
$$\frac{2}{3}x + y = 3.$$

Ker potrebujemo na desni strani 1, celotno enačbo delimo s 3. Dobimo, da je

$$\frac{2x}{9} + \frac{y}{3} = 1 \quad \text{ozroma} \quad \frac{x}{\frac{9}{2}} + \frac{y}{3} = 1.$$

(iv) **Normalna oblika:** $x \cos \phi + y \sin \phi = p$

Izračunajmo razdaljo p . Izhajali bomo iz ploščine trikotnika, ki nastane v koordinatnem sistemu



Po eni strani je

$$S_{\Delta} = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{3 \cdot \frac{9}{2}}{2} = \frac{27}{4},$$

po drugi pa z upoštevanjem, da je p dejansko dolžina višine na stranico c , dobimo

$$S_{\Delta} = \frac{c \cdot v_c}{2} = \frac{p \cdot c}{2} = \frac{p}{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{p}{2} \cdot \sqrt{3^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \frac{p}{2} \cdot \sqrt{\frac{117}{4}} = \frac{3\sqrt{13}p}{4}.$$

Potem pa iz

$$\frac{27}{4} = \frac{3\sqrt{13}p}{4} \quad \text{sledi, da je} \quad p = \frac{9}{\sqrt{13}} = \frac{9\sqrt{13}}{13}.$$

Da dobimo normalno obliko premice, bomo uporabili implicitno obliko

$$2x + 3y - 9 = 0 \quad \text{ozroma} \quad 2x + 3y = 9.$$

Da bo na desni strani enačbe izračunan p , bomo celotno enačbo pomnožili s $\frac{\sqrt{13}}{13}$. Potem pa je

$$\frac{2\sqrt{13}}{13}x + \frac{3\sqrt{13}}{13}y = \frac{9\sqrt{13}}{13}.$$

4.1 Sistem dveh linearnih enačb z dvema spremenljivkama

Sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama x in y zapišemo v obliki

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

kjer so a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 in $c_2 \in \mathbb{R}$. Takšen sistem lahko rešimo na tri različne načine:

- (i) z metodo nasprotnih si koeficientov;
- (ii) z zamenjalnim načinom;
- (iii) grafično.

Pri reševanju sistema **z metodo nasprotnih si koeficientov** pomnožimo eno (ali obe) enačbo s takim številom, da dobimo pred isto spremenljivko v obeh enačbah nasprotna si koeficienta.

$$\begin{array}{rclcl} a_1x + b_1y & = & c_1 & \quad \backslash \cdot a_2 & \Rightarrow & a_1a_2x + b_1a_2y & = & c_1a_2 \\ & & & & & & & & \\ a_2x + b_2y & = & c_2 & \quad \backslash \cdot (-a_1) & & -a_1a_2x - b_2a_1y & = & -c_2a_1 \end{array}$$

Enačbi seštejemo in izločimo eno neznanko.

$$b_1a_2y - b_2a_1y = c_1a_2 - c_2a_1$$

Dobili smo linearno enačbo z eno spremenljivko, ki jo eksplicitno izrazimo in dobimo, da je

$$y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{b_1a_2 - b_2a_1}$$

V eno izmed začetnih enačb vstavimo dobljen y in izračunamo še x .

Zgled. Sistem enačb rešimo z metodo nasprotnih si koeficientov.

$$\begin{array}{rcl} x + 2y & = & 3 \\ 2x - y & = & -4 \end{array}$$

Prvo enačbo pomnožimo z -2 , da dobimo

$$\begin{array}{rcl} -2x - 4y & = & -6 \\ 2x - y & = & -4 \end{array}$$

Če enačbi seštejemo, je

$$-5y = -10 \quad \text{oziroma} \quad y = 2.$$

V eno od enačb (denimo v $x + 2y = 3$) vstavimo y in izračunamo še x .

$$\begin{array}{rcl} x + 2 \cdot 2 & = & 3 \\ x & = & 3 - 4 = -1. \end{array}$$

Druga praktična metoda za reševanje sistemov je **zamenjalni način**, kjer iz ene enačbe izrazimo eno spremenljivko in jo vstavimo v drugo enačbo.

Zgled. Zgornji sistem rešimo še z zamenjalnim načinom.

$$\begin{aligned}x + 2y &= 3 \\ 2x - y &= -4\end{aligned}$$

Iz prve enačbe izrazimo x ,

$$x = 3 - 2y,$$

in ga vstavimo v drugo enačbo,

$$\begin{aligned}2(3 - 2y) - y &= -4 \\ 6 - 5y &= -4 \\ -5y &= -10 \\ y &= 2\end{aligned}$$

Potem pa je $x = 3 - 2y = 3 - 4 = -1$.

Grafično sistem rešimo tako, da v isti koordinatni sistem narišemo obe premici in pogledamo kje se le-ti sekata. Presečišče $P(x, y)$ je rešitev danega sistema. Ker pa smo tehniki bolj analitično usmerjeni, raje uporabljamo prva dva načina za razreševanje sistemov.

Primeri.

- (1) V apartmajskem naselju je skupaj 51 apartmajev, ki imajo bodisi 4 bodisi 5 postelj. Koliko je apartmajev s po štirimi posteljami in koliko s po petimi posteljami, če je vseh postelj skupaj 227.

Rešitev: Najprej definirajmo spremenljivke:

x ... število apartmajev s 4 posteljami

y ... število apartmajev s 5 posteljami

Sedaj pa lahko definiramo sistem. Iz navodila sta razvidna dva podatka

- vseh apartmajev je 51: $x + y = 51$
- vsak x ima 4 postelje in vsak y ima 5 postelj: $4x + 5y = 227$

Sistem rešimo na oba načina.

- (i) **z metodo nasprotnih si koeficientov:** prvo enačbo množimo z -4

$$\begin{aligned}-4x - 4y &= -204 \\ 4x + 5y &= 227\end{aligned}$$

in enačbi seštejmo. Tako je $y = 23$ in ga vstavimo v prvo enačbo; iz $x + 23 = 51$ sledi, da je $x = 28$.

- (ii) **zamenjalni način:** iz prve enačbe izrazimo x ,

$$x = 51 - y,$$

in ga vstavimo v drugo enačbo

$$4(51 - y) + 5y = 227 \quad \Rightarrow \quad y = 23.$$

Potem pa je $x = 51 - y = 51 - 23 = 28$.

Odgovor: V apartmajskem naselju imajo 28 apartmajev s 4 posteljami in 23 apartmajev s 5 posteljami.

- (2) Dva stroja naredita v 12 urah 34800 vijakov. Koliko izdelkov naredi posamezen stroj v eni uri, če sta danes naredila 17600 vijakov in je prvi stroj delal 8 ur, drugi pa 4 ure?

Rešitev: Najprej definirajmo spremenljivke,

x ... število vijakov v eni uri prvega stroja

y ... število vijakov v eni uri drugega stroja

nato pa še sistem. Iz navodila sta razvidna dva podatka

- vseh vijakov v 12 urah je 34800: $12x + 12y = 34800$
- prvi stroj dela 8 ur, drugi pa 4: $8x + 4y = 17600$

Sistem rešimo na oba načina.

- (i) **z metodo nasprotnih si koeficientov:** drugo enačbo množimo z -3 ,

$$\begin{array}{rcl} 12x + 12y & = & 34800 \\ -24x - 12y & = & -52800 \end{array}$$

in enačbi seštejmo. Iz

$$-12x = 18000 \quad \text{dobimo} \quad x = 1500,$$

ki ga vstavimo v prvo enačbo,

$$12 \cdot 1500 + 12y = 34800 \quad \Rightarrow \quad y = 1400.$$

- (ii) **zamenjalni način:** iz prve enačbe izrazimo x ,

$$12x = 34800 - 12y \quad \Rightarrow \quad x = 2900 - y,$$

ki ga vstavimo v drugo enačbo. Iz

$$8(2900 - y) + 4y = 17600 \quad \text{dobimo} \quad y = 1400.$$

Potem pa je $x = 2900 - y = 1500$.

Odgovor: V eni uri naredi prvi stroj 1500 in drugi stroj 1400 vijakov.

- (3) Pot do letališča je delno asfaltirana, delno makadamska. Asfaltirani del poti je za 100 km daljši od makadamskega. Po asfaltirani poti vozimo s povprečno hitrostjo 90 km/h, po makadamski poti pa s povprečno hitrostjo 40 km/h. Kako dolga je pot do letališča, če vozimo 4 ure?

Rešitev: Najprej definirajmo spremenljivke,

x ... dolžina (v km) asfaltirane poti

y ... dolžina (v km) makadamske poti

nato pa še sistem. Ker je asfaltirani del daljši za 100 km, je

$$x = 100 + y$$

Obrazec, po katerem računamo čas vožnje, je

$$t = \frac{s}{v}$$

kjer je t čas, s prevožena pot in v hitrost na tej poti. Potem pa je

$$4 = \frac{x}{90} + \frac{y}{40} \quad \text{oziroma} \quad 1440 = 4x + 9y$$

Dobimo sistem

$$\begin{aligned} x - y &= 100 \\ 4x + 9y &= 1440 \end{aligned}$$

ki ga rešimo na oba načina.

(i) **z metodo nasprotnih si koeficientov:** prvo enačbo množimo z 9,

$$\begin{aligned} 9x - 9y &= 900 \\ -4x + 9y &= 1440 \end{aligned}$$

in enačbi seštejmo. Iz

$$13x = 2340 \quad \text{dobimo} \quad x = 180,$$

ki ga vstavimo v prvo enačbo,

$$180 - y = 100 \quad \Rightarrow \quad y = 80.$$

(ii) **zamenjalni način:** iz prve enačbe izrazimo x in ga vstavimo v drugo enačbo. Iz

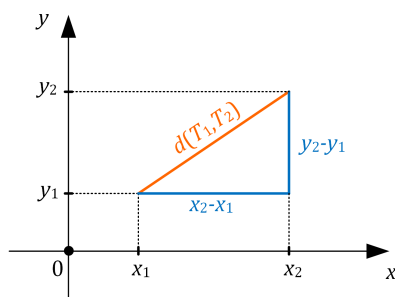
$$4(100 + y) + 9y = 1440 \quad \text{dobimo} \quad y = 80.$$

Potem pa je $x = 100 + y = 180$.

Odgovor: Pot do letališča meri 180 km, pri tem je 80 km makadamske poti in 100 km asfaltirane poti.

4.2 Razdalja dveh točk v ravnini

Oznako za razdaljo smo povzeli po latinski besedi *distantia*, ki v prevodu pomeni razdalja. Zato razdaljo med točkama $T_1(x_1, y_1)$ in $T_2(x_2, y_2)$ označimo kot $d(T_1, T_2)$.



Opazimo, da imamo na skici pravokotni trikotnik, zato lahko uporabimo Pitagorov izrek. Potem pa je

$$d(T_1, T_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Primeri.

- (1) Izračunaj razdaljo med točko $T_1(-2, 7)$ in točko $T_2(4, 7)$.

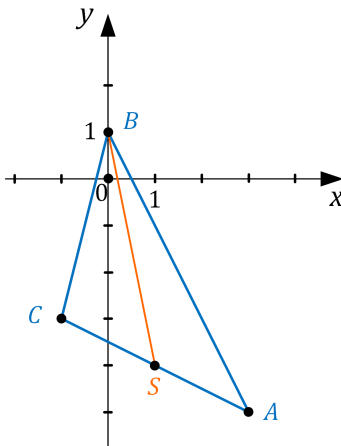
Rešitev: Po zgornjem obrazcu

$$d(T_1, T_2) = \sqrt{(4 - (-2))^2 + (7 - 7)^2} = \sqrt{6^2} = 6$$

dobimo, da sta točki T_1 in T_2 na razdalji šestih enot.

- (2) Izračunaj dolžino težiščnice na stranico b v trikotniku ABC z oglišči $A(3, -5)$, $B(0, 1)$ in $C(-1, -3)$.

Rešitev: Pri geometrijskih nalogah si vedno pomagamo s skico.



Dolžina težiščnice na stranico b je enaka razdalji med točkama S , ki je razpolovišče stranice AC , in B , zato najprej določimo koordinate točke S . Spomnimo se, da je razpolovišče daljice AC definirano kot

$$S \left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2} \right)$$

Tako je $S(1, -4)$ in je

$$|t_b| = d(B, S) = \sqrt{(1 - 0)^2 + (-4 - 1)^2} = \sqrt{26}$$

- (3) Dan je trikotnik ABC z oglišči $A(-6, 1)$, $B(4, -9)$ in $C(11, 8)$. Ali je trikotnik ABC enakokrak? Izračunajte njegov obseg.

Rešitev: Trikotnik bo enakokrak, če sta dve njegovi stranici enako dolgi. Zato izračunajmo dolžine stranic

$$\begin{aligned} |a| &= d(B, C) = \sqrt{(4 - 11)^2 + (-9 - 8)^2} = \sqrt{338} = 13\sqrt{2} \\ |b| &= d(A, C) = \sqrt{(-6 - 11)^2 + (1 - 8)^2} = \sqrt{338} = 13\sqrt{2} \\ |c| &= d(A, B) = \sqrt{(-6 - 4)^2 + (1 + 9)^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \end{aligned}$$

Ker sta dolžini stranic a in b enako dolgi, je trikotnik ABC enakokrak. Po obrazcu za obseg trikotnika je

$$o = |a| + |b| + |c| = 13\sqrt{2} + 13\sqrt{2} + 10\sqrt{2} = 36\sqrt{2}.$$

- (4) Točki $A(-2, 7)$ in $B(6, y)$ sta krajišči daljice AB . Kolikšna je ordinata točke B , če meri daljica AB 17 enot?

Rešitev: Podatki pravijo, da je $d(A, B) = 17$, zato je

$$\begin{aligned} 17 &= \sqrt{(-2 - 6)^2 + (7 - y)^2} \\ 17 &= \sqrt{113 - 14y + y^2} & \backslash \text{ kvadriramo} \\ 289 &= 113 - 14y + y^2 \end{aligned}$$

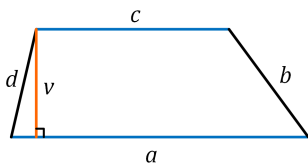
Dobimo kvadratno enačbo, zato vse člene premaknemo na eno stran enačbe. Potem je

$$\begin{aligned} 0 &= y^2 - 14y - 176 \\ 0 &= (y - 22)(y + 8) \end{aligned}$$

Dobimo dve rešitvi. Tako točka $B_1(6, 22)$ kot točka $B_2(6, -8)$ sta od točke A oddaljeni za 17 enot.

4.3 Ploščina trikotnika za podana oglišča trikotnika

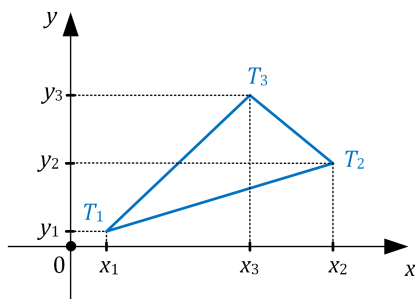
Da bomo lahko izpeljali formulo za ploščino trikotnika za podana oglišča, se spomnimo, da je trapez geometrijski štirikotnik, ki ima dve stranici vzporedni (le-ti imenujemo osnovnici).



Potem pa se ploščina takšnega trapeza izračuna po obrazcu

$$S_{\text{trapez}} = \frac{(a + c)}{2} \cdot v,$$

Vemo, da je trikotnik določen s tremi **nekolinearnimi točkami** (to so točke, ki ne ležijo na isti premici). Zato naj bo trikotnik v ravnini podan s koordinatami oglišč $T_1(x_1, y_1)$, $T_2(x_2, y_2)$ in $T_3 = (x_3, y_3)$. Zanima nas, kolikšna je ploščina tega trikotnika?



Če vpeljemo točke $A(x_1, 0)$, $B(x_3, 0)$ in $C(x_2, 0)$, je iz slike razvidno, da je ploščina trikotnika enaka

$$\begin{aligned} S_{\Delta T_1 T_2 T_3} &= S_{\text{trapez} AB T_3 T_1} + S_{\text{trapez} BC T_2 T_3} - S_{\text{trapez} AC T_2 T_1} \\ &= \frac{y_1 + y_3}{2}(x_3 - x_1) + \frac{y_3 + y_2}{2}(x_2 - x_3) - \frac{y_1 + y_2}{2}(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

Celotno enakost pomnožimo z 2 in dobimo, da je

$$\begin{aligned} 2S_{\Delta T_1 T_2 T_3} &= (y_1 + y_3)(x_3 - x_1) + (y_3 + y_2)(x_2 - x_3) - (y_1 + y_2)(x_2 - x_1) \\ &= y_1 x_3 + \cancel{y_3 x_3} - y_1 x_1 - y_3 x_1 + y_3 x_2 + \cancel{y_2 x_2} - \cancel{y_3 x_3} - y_2 x_3 - y_1 x_2 - \cancel{y_2 x_2} + y_1 x_1 + y_2 x_1 \end{aligned}$$

Člene, ki pri tem ostanejo, poskusimo na „pameten“ način zložiti v enostavnejšo obliko

$$\begin{aligned} 2S_{\Delta T_1 T_2 T_3} &= (y_1 x_3 - y_2 x_3) + (-y_1 x_1 + y_2 x_1) + (y_1 x_1 - y_3 x_1) + (-y_1 x_2 + y_3 x_2) \\ &= x_3(y_1 - y_2) - x_1(y_1 - y_2) + x_1(y_1 - y_3) - x_2(y_1 - y_3) \\ &= (x_3 - x_1)(y_1 - y_2) + (x_1 - x_2)(y_1 - y_3) \\ &= -(x_1 - x_3)(y_1 - y_2) + (x_1 - x_2)(y_1 - y_3) \end{aligned}$$

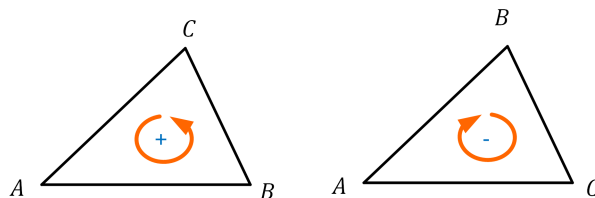
Dobimo, da je

$$S_{\Delta T_1 T_2 T_3} = \frac{1}{2} ((x_1 - x_2)(y_1 - y_3) - (x_1 - x_3)(y_1 - y_2))$$

Ta zapis je enakovreden zapisu z determinanto, in sicer

$$S_{\Delta T_1 T_2 T_3} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \end{vmatrix}$$

Pri izpeljavi ploščine trikotnika je potrebno biti malenkost bolj pazljiv, saj je potrebno vpeljati še pojem **orientiranosti trikotnika**. Le-ta pa je odvisna od zaporedja oglišč



Če si oglišča sledijo v smeri urinega kazalca, je trikotnik negativno orientiran; če pa si sledijo v nasprotni smeri urinega kazalca, je trikotnik pozitivno orientiran. Ob upoštevanju le-tega je

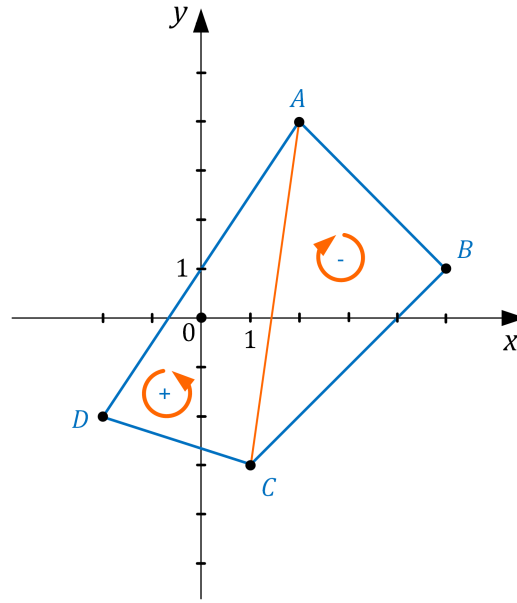
$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \text{orient.} \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \end{vmatrix}$$

kjer je orient.= 1, če je trikotnik pozitivno orientiran in je orient.= -1, če je trikotnik negativno orientiran.

Primeri.

- (1) Izračunaj ploščino štirikotnika z oglišči $A(2, 4)$, $B(5, 1)$, $C(1, -3)$ in $D(-2, -2)$.

Rešitev: Najprej si narišimo štirikotnik v koordinatnem sistemu



Glede na skico je

$$\begin{aligned}
 S_{ABCD} &= S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} x_A - x_B & y_A - y_B \\ x_A - x_C & y_A - y_C \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A - x_D & y_A - y_D \\ x_A - x_C & y_A - y_C \end{vmatrix} \\
 &= -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 - 5 & 4 - 1 \\ 2 - 1 & 4 + 3 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 + 2 & 4 + 2 \\ 2 - 1 & 4 + 3 \end{vmatrix} \\
 &= -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} \\
 &= -\frac{1}{2} ((-3) \cdot 7 - 3 \cdot 1) + \frac{1}{2} (4 \cdot 7 - 6 \cdot 1) \\
 &= 12 + 11 = 23
 \end{aligned}$$

Torej, ploščina štirikotnika $ABCD$ znaša 23 enot.

- (2) Ali točke $A(-4, -1)$, $B(-2, 3)$ in $C(1, 9)$ ležijo na isti premici?

Rešitev: Če bodo točke ležale na isti premici, je ploščina trikotnika ABC enaka 0,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \text{orient.} \begin{vmatrix} x_A - x_B & y_A - y_B \\ x_A - x_C & y_A - y_C \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \text{orient.} \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -5 & -10 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \text{orient.} (20 - 20) = 0.$$

Torej, točke A , B in C so kolinearne.

- (3) Določite x tako, da bodo točke $A(-1, 7)$, $B(1, 1)$ in $C(x, -5)$ ležale na isti premici.

Rešitev: Točke bodo ležale na isti premici, če bo $S_{\Delta ABC} = 0$, zato

$$0 = \begin{vmatrix} x_A - x_B & y_A - y_B \\ x_A - x_C & y_A - y_C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 - 1 & 7 - 1 \\ -1 - x & 7 + 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ -1 - x & 12 \end{vmatrix} = -24 - 6(-1 - x) = 6x - 18$$

Dobimo linearno enačbo,

$$\begin{aligned} 6x - 18 &= 0 \\ 6x &= 18 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

- (4) Ploščina negativno orientiranega trikotnika ABC z oglišči $A(-5, -1)$, $B(x, 4)$ in $C(4, -3)$ je 29,5. Izračunajte absciso oglišča B .

Rešitev: Ker je trikotnik negativno orientiran, je

$$S_{\Delta ABC} = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A - x_B & y_A - y_B \\ x_A - x_C & y_A - y_C \end{vmatrix}$$

Potem pa je

$$\frac{59}{2} = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} -5 - x & -5 \\ -9 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(55 + 2x)$$

Enačbo množimo z 2 in dobimo, da je

$$59 = 55 + 2x, \quad \text{in zato} \quad x = 2.$$

Literatura

- [1] D. Kavka, et. al, LINEA = Črta: matematika za 1. letnik gimnazij, Modrijan, Ljubljana, 2002.
- [2] A. Blaznik, et. al, REALNA števila; Linearna funkcija, DZS, Ljubljana, 1999.
- [3] M. Ravnikar, Matematika v srednji šoli: zbirka rešenih nalog za pripravo na zaključni in sprjemni izpit, TauRo d.o.o., Celje, 1992.
- [4] R. Smedley, G. Wiseman, Mathematics standard level for the IB Diploma, Oxford University press, Oxford, 2004.
- [5] R. Blitzler, Introductory algebra for college students, Prentice-Hall, New Jersey, 1997.